



## **DOCUMENT DE RECHERCHE**

### **EPEE**

**CENTRE D'ETUDE DES POLITIQUES ECONOMIQUES DE L'UNIVERSITÉ D'EVRY**

---

**Nouvelle synthèse et politique monétaire**

*Michel GUILLARD*

**00 – 07**

# “Nouvelle synthèse” et politique monétaire

Michel Guillard  
EPEE, Université d'Evry  
4 Bvd François Mitterrand  
91025 Evry Cedex  
e-mail : guillard@eco.univ-evry.fr

Avril 2000

## Résumé

Ces notes de cours sont destinées à rendre accessible la littérature contemporaine sur la politique monétaire aux étudiants de second et de troisième cycles. Certaines sections plus difficiles, indiquées par une étoile<sup>(\*)</sup>, peuvent être survolées lors d'une première lecture (en second cycle, notamment). La première section présente les fondements microéconomiques du modèle de la nouvelle synthèse. La deuxième section réexamine les questions de politique monétaire optimale dans le cadre de ce modèle et la troisième section introduit les règles opératoires et présente la base de ce qui peut constituer le coeur des nouveaux modèles macroéconométriques.

# 1 La nouvelle synthèse : objectifs et méthodologie

- Objectif : le courant de la “nouvelle synthèse” (néoclassique ou keynésienne, selon les préférences) tente d’établir une synthèse entre la démarche RBC (microfondements, étalonnage) et la prise en compte de rigidités nominales, telles que les nouveaux keynésiens les ont introduites au cours des années 80. Il s’agit notamment de rendre compte de faits stylisés délaissés ou imparfaitement reproduits par les modèles de type RBC, faits stylisés qui concernent surtout l’évolution de l’inflation et de son lien avec le produit national.
- Les principaux faits stylisés dont il faut rendre compte :
  1. Une hausse du revenu est suivie d’une hausse de l’inflation,
  2. Une hausse de l’inflation est suivie d’une baisse du revenu,
  3. L’inflation est persistante.

## Un nouveau modèle IS-LM ... sans LM

- Dans sa forme la plus simple, le modèle de la nouvelle synthèse est composé des équations suivantes :
  1. Une courbe IS intertemporelle :

$$y_t = E_t y_{t+1} - \sigma (i_t - E_t \pi_{t+1} - \bar{r}) + \varepsilon_{yt}$$

2. Une courbe de Phillips intertemporelle :

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \alpha (y_t - y_t^n) + \eta_t$$

3. Une règle monétaire (de type “règle de Taylor” ou autre) :

$$i_t = \mathcal{F}_t$$

## 2 Les fondements du modèle de la “nouvelle synthèse”<sup>(\*)</sup>

Dans cette section, on dérive les principales équations du modèle macroéconomique sur la base de comportements d’optimisation intertemporelle. L’économie est constituée d’un consommateur représentatif et d’un grand nombre d’entreprises en situation de concurrence monopolistique. La production du bien de consommation est obtenue à partir de travail uniquement. Le modèle s’écarte, en cela, des modèles de cycles réels dont la dynamique repose en grande partie sur l’évolution du stock de capital. Les rigidités nominales jouent un rôle essentiel dans le modèle et sont intégrées aux comportements de détermination optimale des prix.

### 2.1 Le consommateur

Soit un consommateur représentatif dont l’objectif intertemporel est le suivant :

$$E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \beta^\tau \{u(C_{t+\tau}) + v(M_{t+\tau}/P_{t+\tau}) - \ell(N_{t+\tau})\} \quad (1)$$

$u(C_{t+\tau})$  et  $\ell(N_{t+\tau})$  représentent respectivement l’utilité instantanée de la consommation et la désutilité instantanée du travail ; elle sont données par :

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma} \quad (2)$$

et,

$$\ell(N_t) = \frac{N_t^{1+1/\sigma_n}}{1+1/\sigma_n} \quad (3)$$

où  $\sigma > 0$  et  $\sigma_n > 0$  sont les élasticités intertemporelle de substitution de la consommation et du travail (en valeur absolue). Enfin,  $v(M_{t+\tau}/P_{t+\tau})$  représente l’utilité liée à la détention d’enchasses réelles,  $M_{t+\tau}/P_{t+\tau}$  et vérifie  $v'(M_{t+\tau}/P_{t+\tau}) > 0$  et  $v''(M_{t+\tau}/P_{t+\tau}) \leq 0$ .

Le consommateur peut répartir sa consommation sur un continuum de biens de masse unitaire, l’élasticité de substitution entre les biens, notée  $\theta$ , étant supposée constante et supérieure à l’unité ( $\theta > 1$ ). L’indice  $C$  est alors un agrégat de consommation CES défini par :

$$C = \left[ \int_0^1 C(z)^{1-1/\theta} dz \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

Un indice de prix à la consommation quelconque, noté  $P$ , doit, par définition, satisfaire la condition suivante :

$$PC = \int_0^1 P(z)C(z)dz \quad (5)$$

“L’indice vrai du coût de la vie”, c’est à dire l’indice qu’il convient d’utiliser ici<sup>1</sup>, est donné par :

$$P = \left[ \int_0^1 P(z)^{1-\theta} dz \right]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (6)$$

L’agent respecte, à chaque période, la contrainte budgétaire nominale suivante :

$$\begin{aligned} P_t C_t \leq & W_t N_t - P_t T_t + M_{t-1} - M_t + B_t - \frac{B_{t+1}}{(1+i_t)} \\ & + \int_0^1 [Q_t(z) + D_t(z)] \eta_{t-1}(z) dz - \int_0^1 Q_t(z) \eta_t(z) dz \end{aligned} \quad (7)$$

$W_t$  est le salaire nominal,  $T_t$ , la valeur réelle des impôts (ou des transferts si  $T_t < 0$ );  $B_{t+1}$  représente le montant de titres domestiques que l’agent acquière en  $t$ . Chaque titre offre à son détenteur 1 unité de monnaie à la période suivante. Son prix de marché est donné par  $(1+i_t)^{-1}$ , où  $i_t$  est un taux d’intérêt nominal à court terme. L’agent a également la possibilité d’acquérir des actions des entreprises :  $Q_t(z)$  est le prix d’une action de l’entreprise qui produit le bien  $z$ ,  $D_t(z)$  le montant des dividendes versé par action et  $\eta_t(z)$ , la quantité d’actions de cette entreprise achetées par le consommateur à la période  $t$ .

En intégrant (5) dans (7) et en notant  $\lambda_t$  le multiplicateur actualisé associé à la contrainte budgétaire, les conditions d’optimalité du premier ordre liées à la maximisation du programme (1)-(7) par rapport à  $C_t(z)$ ,  $M_t$ ,  $B_{t+1}$ ,  $\eta_t(z)$  et  $N_t$  sont respectivement :

$$0 = \left( \frac{C_t(z)}{C_t} \right)^{-\frac{1}{\theta}} u'(C_t) - \lambda_t P_t(z) \quad \forall z \quad (8)$$

$$0 = \frac{v'(M_t/P_t)}{P_t} - \lambda_t + E_t \beta \lambda_{t+1} \quad (9)$$

$$0 = -\lambda_t + E_t \beta \lambda_{t+1} (1+i_t) \quad (10)$$

$$0 = -\lambda_t Q_t(z) + E_t \beta \lambda_{t+1} [Q_{t+1}(z) + D_{t+1}(z)] \quad \forall z \quad (11)$$

$$0 = -\ell'(N_t) + \lambda_t W_t \quad (12)$$

En multipliant (8) par  $P_t C_t(z)$  et en sommant sur tous les biens, on trouve :

$$u'(C_t) P_t C_t = \lambda_t P_t \int_0^1 P_t(z) C_t(z) dz$$

---

<sup>1</sup>On obtient cet indice en résolvant le dual du consommateur, c’est-à-dire en cherchant la dépense minimale compatible avec le maintien d’un niveau de bien-être donné.

dont on tire, par identification avec (5) :

$$\lambda_t = u'(C_t)/P_t \quad (13)$$

Les résultats précédents peuvent alors se réécrire sous la forme :

$$C_t(z) = \left( \frac{P_t(z)}{P_t} \right)^{-\theta} C_t \quad \forall z \quad (14)$$

$$\frac{i_t}{1+i_t} = \frac{v'(M_t/P_t)}{u'(C_t)} \quad (15)$$

$$(1+i_t)^{-1} = E_t \left[ \frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right] \quad (16)$$

$$\frac{Q_t(z)}{P_t} = E_t \left[ \frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \left( \frac{Q_{t+1}(z)}{P_{t+1}} + \frac{D_{t+1}(z)}{P_{t+1}} \right) \right] \quad \forall z \quad (17)$$

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{\ell'(N_t)}{u'(C_t)} \quad (18)$$

L'équation (14) détermine la fonction de demande<sup>2</sup> pour chaque type de bien.

(15) est l'embryon d'une fonction de demande<sup>3</sup> d'encaisses réelles. En spécifiant la fonction  $v(\cdot)$ , il serait possible d'en déduire l'équation d'une courbe LM (presque) traditionnelle. Nous verrons cependant que, sous les hypothèses que nous retiendrons concernant l'intervention de la Banque Centrale, celle-ci ne nous donnerait qu'une information résiduelle sur le niveau de la masse monétaire.

L'équation (16) est l'équation d'Euler en incertain. En utilisant la propriété bien connue  $E(ab) = E(a) \cdot E(b) + cov(a, b)$ , et en notant  $\pi_{t+1} = (P_{t+1}/P_t) - 1$  le taux d'inflation sur les prix à la consommation, elle peut se réécrire :

$$(1 - \varphi_t) E_t \left[ \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \right] = \left[ E_t \left( \frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} \right) \right]^{-1} \quad (19)$$

où  $\varphi_t$  a la dimension d'une prime de risque<sup>4</sup> définie par :

$$\varphi_t = \frac{-cov[u'(C_{t+1}), 1/P_{t+1}]}{E_t u'(C_{t+1}) \cdot E_t(1/P_{t+1})}$$

Si l'agent avait la possibilité de placer son épargne dans un titre parfaitement indexé sur l'inflation, il égaliserait le terme de droite de l'équation (19) au facteur d'intérêt réel  $(1+r_t)$ . Lorsque la consommation est négativement corrélée avec

<sup>2</sup>Il ne s'agit pas réellement de fonctions de demande puisqu'elles dépendent d'un indice de consommation lui-même endogène. Néanmoins, du point de vue des entreprises, ce même indice est exogène et (19) représente bien les fonctions de demande perçues par les producteurs.

<sup>3</sup>La même remarque que dans la note précédente s'applique ici.

<sup>4</sup>Dans un environnement déterministe, on a  $\varphi_t = 0$ .

le niveau général des prix, la prime  $\varphi_t$  est positive et le consommateur exige un taux d'intérêt nominal plus élevé afin de compenser le risque inflationniste lié à la détention de titres non-indexés.

L'équation (17) résulte de la prise de position de l'agent sur le marché des actions. Combinée à l'équation (19), elle permet de fournir un principe de valorisation des actions par le marché.

(18), enfin, est l'équation d'arbitrage consommation/loisir de l'agent.

## 2.2 Les producteurs

La demande agrégée de biens domestiques, notée  $Y_t$ , se compose de la demande de biens de consommation  $C_t$  et de la demande publique, notée  $G_t$ , soit :

$$Y_t = C_t + G_t \quad (20)$$

On suppose que le gouvernement résout un programme (statique) similaire à celui du consommateur représentatif, avec la même élasticité de substitution entre les biens. La demande s'adressant à chaque producteur  $z$  prend alors une forme identique à celle que l'on a déduit du programme du consommateur (équation (14)) :

$$Y_t(z) = \left( \frac{P_t(z)}{P_t} \right)^{-\theta} Y_t \quad (21)$$

La production est effectuée à partir d'une technologie à rendements constants<sup>5</sup> :

$$Y_t(z) = A_t N_t(z) \quad (22)$$

où  $N_t(z)$  est la quantité de travail,  $A_t$  et un choc de productivité de moyenne unitaire et commun à toutes les entreprises.

Sans perte de généralité, on suppose que les entreprises reversent sous forme de dividendes la totalité de leur excédent brut d'exploitation. En normalisant à 1 la quantité d'actions émises par l'entreprise à la période initiale (une fois pour toute) et en notant  $d_t(z)$  la valeur réelle des dividendes en termes de biens de consommation, on a :

$$d_t(z) = \frac{D_t(z)}{P_t} = \left( \frac{P_t(z)}{P_t} Y_t(z) - \frac{W_t}{P_t} N_t(z) \right) \quad (23)$$

L'objectif de l'entrepreneur est de maximiser le rendement offert aux actionnaires sur les actions qu'ils possèdent au début de la période  $t$ , c'est-à-dire de

---

<sup>5</sup>Le cas de rendements non constants (décroissants ou légèrement croissants) est envisageable mais complique un peu l'exposition des résultats.

maximiser la valeur réelle (de revente éventuelle) des actions augmentée des dividendes de la période  $t$ , soit :  $d_t(z) + q_t(z)$ , où  $q_t(z) = Q_t(z)/P_t$ . En utilisant l'équation de valorisation (17) issue du programme du consommateur représentatif, ce critère s'écrit :

$$d_t(z) + q_t(z) = d_t(z) + E_t \left[ \frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)} (d_{t+1}(z) + q_{t+1}(z)) \right]$$

ou encore, en excluant les trajectoires explosives et la possibilité de bulles spéculatives :

$$d_t(z) + q_t(z) = E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \frac{\beta^\tau u'(C_{t+\tau})}{u'(C_t)} d_{t+\tau}(z) \quad (24)$$

En suivant Calvo (1983), on suppose que les producteurs ne déterminent leur prix de manière optimale que s'il reçoivent un signal leur indiquant qu'il est opportun de le faire<sup>6</sup>. Ce signal arrive avec une probabilité  $(1 - \phi)$ , indépendamment de la politique de tarification adoptée pendant les périodes précédentes. Dans le cas contraire, l'entreprise se contente d'appliquer une règle simple de révision des prix de type<sup>7</sup> :

$$\bar{P}_t(z) = (1 + \pi) P_{t-1}(z)$$

où  $\pi$  est le taux d'inflation moyen de long terme. Comme la probabilité de recevoir un signal est indépendant de l'histoire d'une firme, le prix moyen pratiqué par les firmes ne révisant pas leur prix de manière optimale s'écrit également :

$$\bar{P}_t = (1 + \pi) P_{t-1}$$

En notant  $P_{t,t}$  le prix choisi par les entreprises qui, recevant un signal, réactualisent leur prix de manière optimale, l'indice général des prix domestiques, déduit de (6) s'écrit :

$$P_t = \left[ (1 - \phi) (P_{t,t})^{1-\theta} + \phi [(1 + \pi) P_{t-1}]^{1-\theta} \right]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (25)$$

La probabilité pour qu'un prix fixé à une date donnée ne soit pas révisé de manière optimale à la période suivante est  $\phi$ , 2 périodes plus tard,  $\phi^2$  et  $\tau$  périodes après,  $\phi^\tau$ . Le programme de maximisation d'une firme ayant reçu un signal positif en  $t$  peut s'écrire :

$$\max_{P_{t,t}} E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \frac{(\phi\beta)^\tau u'(C_{t+\tau})}{u'(C_t)} d_{t+\tau}^t(z) \quad (26)$$

---

<sup>6</sup>King & Wolman (1996), Yun (1996) et Woodford (1996) ont généralisé l'usage de cette hypothèse dans des modèles bouclés de petites taille. Roberts (1995) et Gertler & Gali (1998) ont montré que la courbe de phillips qui en découle n'est pas rejetée par les données (voir Estrella & Fuhrer (1998) pour un avis opposé).

<sup>7</sup>Cette hypothèse, adoptée par Yun (1976), permet d'assurer la neutralité de l'inflation à long terme sur le niveau d'output.

où  $d_{t+\tau}^t(z)$  représente le dividende réel (en terme de prix à la consommation) que la firme verse en  $t + \tau$  si elle n'a pas révisé son prix depuis la date  $t$  :

$$d_{t+\tau}^t(z) = \left( \frac{(1 + \pi)^\tau P_{t,t}}{P_{t+\tau}} - \frac{W_{t+\tau}}{A_{t+\tau} P_{t+\tau}} \right) Y_{t+\tau}^t \quad (27)$$

avec

$$Y_{t+\tau}^t = \left( \frac{(1 + \pi)^\tau P_{t,t}}{P_{t+\tau}} \right)^{-\theta} Y_{t+\tau} \quad (28)$$

La condition du premier ordre du programme (26)-(28) s'écrit :

$$E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \frac{(\phi\beta)^\tau u'(C_{t+\tau})}{u'(C_t)} \left\{ \left( \frac{(1 + \pi)^\tau P_{t,t}}{P_{t+\tau}} - \eta CM_{t+\tau} \right) Y_{t+\tau}^t \right\} = 0 \quad (29)$$

où  $\eta = \theta/(\theta - 1)$  est le facteur de marge<sup>8</sup> pratiqué par la firme en l'absence de rigidité nominale et  $CM_{t+\tau}$ , le coût marginal de production évalué en termes réels :

$$CM_{t+\tau} = \frac{W_{t+\tau}}{A_{t+\tau} P_{t+\tau}} \quad (30)$$

### 2.3 Les autorités monétaires et fiscales

La contrainte budgétaire gouvernementale s'obtient en agrégeant les contraintes des autorités fiscales et des autorités monétaires :

$$P_t G_t + B_t = P_t T_t + M_t - M_{t-1} + \frac{B_{t+1}}{(1 + i_t)} \quad (31)$$

où  $G_t$  représente le niveau des dépenses publiques.

Afin de nous concentrer sur la politique monétaire, nous supposons que les autorités fiscales veillent, à chaque instant, à assurer la "soutenabilité" de la politique adoptée. En d'autres termes, la contrainte budgétaire intertemporelle de l'Etat est toujours équilibrée et la politique fiscale est toujours *Ricardienne*.

Plusieurs politiques monétaires sont envisageables dans ce type de modèle. Une première approche consiste à étudier les règles de politique monétaire optimales. Celles-ci résultent de la maximisation, par les autorités, d'un critère de Bien-Etre prenant généralement la forme d'une fonction quadratique qui dépend (négativement) de l'écart de l'output par rapport au revenu naturel ou au revenu de long terme et celui du taux d'inflation par rapport à une cible. Comme nous le verrons, se pose alors le problème de la crédibilité de la règle optimale.

Alternativement, nous étudierons, dans la tradition des travaux de Taylor (1993), l'utilisation par les autorités monétaire d'une fonction de réaction systématique. On supposera alors que la banque centrale utilise le taux d'intérêt à

---

<sup>8</sup>  $1 +$  le taux de marge.

court terme comme instrument privilégié de politique monétaire. De façon générale, on posera :

$$i_t = \mathcal{F}(\Omega_t) \quad (32)$$

où  $\mathcal{F}(\Omega_t)$  représente une fonction de réaction explicite ou implicite dont l'argument,  $\Omega_t$ , est un vecteur de variables pertinentes conditionnelles à l'information disponible en  $t$ .

Ces différentes politiques monétaires seront davantage spécifiées lorsque le modèle sera linéarisé.

## 2.4 Le modèle linéarisé

Dans cette sous-section, on procède à la linéarisation des équations du modèle précédent. On notera  $k_t = \ln K_t$  et  $\hat{k}_t = (K_t - \bar{K}) / \bar{K} \simeq \ln K_t - \ln \bar{K}$ , l'écart relatif entre la variable  $K_t$  et sa valeur stationnaire  $\bar{K}$ . La dernière sous-section est consacrée à la présentation de la règle de politique monétaire retenue.

### 2.4.1 Les équations de prix

En linéarisant (25), on obtient la relation dynamique suivante entre le niveau général des prix et celui fixé par les entreprises qui redéfinissent leur prix de manière optimale :

$$p_t = (1 - \phi) p_{t,t} + \phi (p_{t-1} + \pi)$$

ou, de manière équivalente :

$$p_t = p_{t,t} - \frac{\phi}{1 - \phi} \hat{\pi}_t \quad (33)$$

En linéarisant, enfin, l'équation de salaire (18), à l'aide de (2) et de (3), on obtient :

$$\hat{\omega}_t = (\widehat{w_t - p_t}) = \frac{\hat{c}_t}{\sigma} + \frac{\hat{n}_t}{\sigma_n} \quad (34)$$

### 2.4.2 La courbe IS intertemporelle

En linéarisant (19) avec (2), on retrouve, en négligeant les dépenses gouvernementales, la spécification de la courbe IS intertemporelle que Kerr & King (1996) et McCallum & Nelson (1997) ont popularisée, soit :

$$\hat{c}_t = E_t \hat{c}_{t+1} - \sigma (i_t - E_t \pi_{t+1} - \bar{r} - \varepsilon_{\varphi t})$$

avec  $\bar{r} = -\ln \beta + \bar{\varphi}$ , et  $\varepsilon_{\varphi t} = \varphi_t - \bar{\varphi}$  où  $\bar{\varphi}$  est le niveau de long terme de la prime de risque.

La présence du termes avancé  $E_t \hat{c}_{t+1}$  dans la courbe IS traduit la prise en compte des comportement de lissage de la consommation par les agents. Lorsque les agents prévoient d'augmenter leur consommation future, à la suite par exemple d'une annonce de revenus en hausse, ils accroissent également leur consommation présente afin de préserver leur taux marginal de substitution intertemporel.

La demande globale de biens domestiques s'obtient en linéarisant l'équation (20) :

$$\hat{y}_t = \hat{c}_t + \tilde{g}_t \quad (35)$$

où  $\tilde{g}_t$  représente (en écart par rapport à sa valeur stationnaire) le ratio des dépenses publiques sur les dépenses privées.

En réunissant ces deux dernières équations, la demande de biens peut se ré-écrire :

$$\hat{y}_t = E_t \hat{y}_{t+1} - \sigma (\hat{v}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) + \varepsilon_{yt}$$

où  $\varepsilon_{yt} = \sigma \varepsilon_{\varphi t} + \tilde{g}_t - E_t \hat{g}_{t+1}$  est un choc composite.

### 2.4.3 La courbe de Phillips NK

En linéarisant, autour de l'état stationnaire, la condition d'optimalité du premier ordre de la firme (29), on obtient :

$$E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} (\phi\beta)^\tau \{p_{t,t} + \tau\pi - p_{t+\tau} - \widehat{cm}_{t+\tau}\} = 0$$

En combinant cette équation avec (33), il vient :

$$E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} (\phi\beta)^\tau \left\{ p_t + \frac{\phi}{1-\phi} \hat{\pi}_t + \tau\pi - p_{t+\tau} - \widehat{cm}_{t+\tau} \right\} = 0$$

En passant par les opérateurs de décalage, on trouve, après quelques manipulations :

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + (1 - \phi\beta) \left( \frac{1 - \phi}{\phi} \right) \widehat{cm}_t \quad (37)$$

Cette équation est la version keynésienne<sup>9</sup> de la courbe de phillips augmentée des nouveaux classiques. L'inflation future apparaît à cause de la présence de rigidités nominales. Lorsque les entrepreneurs anticipent une hausse du niveau général des prix, c'est-à-dire une hausse des prix de leurs concurrents, pour la

<sup>9</sup>Roberts (1995) nomme cette équation "*the New Keynesian Phillips Curve*". La traduction du qualificatif "*New Keynesian*" n'étant pas aisée, nous nous contentons de la seconde partie du terme.

période  $t + 1$ , ils prennent en compte la possibilité de ne pas être en mesure de pouvoir réviser leur prix dans le futur et les augmentent aujourd’hui. Le terme suivant de cette équation représente la force de rappel de l’inflation. Il est essentiellement constitué du coût marginal. Lorsque ce dernier s’écarte de sa valeur de long terme, l’augmentation de prix des entreprises devient supérieure à l’inflation stationnaire ( $\pi$ ). Le poids de cette force de rappel est inversement relié au degré de rigidité nominale  $\phi$ .

L’expression de  $\widehat{cm}_t$  s’obtient en linéarisant (30) :

$$\widehat{cm}_t = \hat{\omega}_t - \hat{a}_t$$

En substituant, dans l’équation précédente,  $\hat{\omega}_t$  par son expression donnée dans (34), on obtient :

$$\widehat{cm}_t = \frac{\hat{y}_t - \tilde{g}_t}{\sigma} + \frac{\hat{y}_t - \hat{a}_t}{\sigma_n} - \hat{a}_t \quad (38)$$

avec  $\hat{y}_t - \tilde{g}_t = \hat{c}_t$  et  $\hat{y}_t - \hat{a}_t = \hat{n}_t$ .

En injectant (38) dans (37), on obtient enfin :

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \alpha \hat{y}_t + \varepsilon_{\pi t} \quad (39)$$

où  $\alpha = (1 - \phi\beta) \left( \frac{1-\phi}{\phi} \right) \left( \frac{\sigma+\sigma_n}{\sigma\sigma_n} \right)$  et  $\varepsilon_{\pi t} = -\alpha \left( \frac{\sigma_n \tilde{g}_t + \sigma(1+\sigma_n)\hat{a}_t}{\sigma+\sigma_n} \right)$  est un choc composite.

En absence de rigidité nominale,  $\phi = 0$ , la seule solution possible à l’équation (37) est  $\widehat{cm}_t = 0$  ou encore  $\hat{y}_t = \hat{y}_t^n$ , avec :

$$\hat{y}_t^n = \frac{\sigma_n \tilde{g}_t + \sigma(1 + \sigma_n) \hat{a}_t}{\sigma + \sigma_n} \quad (40)$$

qui représente le revenu naturel (en écart à sa valeur de long terme). La courbe de phillips NK peut donc également s’écrire :

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \alpha (\hat{y}_t - \hat{y}_t^n) \quad (41)$$

L’unique prise en compte des chocs de productivité ne suffit pas pour rendre compte de la diversité des chocs susceptibles d’affecter l’inflation. A cette fin, on peut facilement introduire un choc supplémentaire affectant directement l’inflation (le “*cost-push inflation shock*”) à travers le coût marginal :

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \alpha (\hat{y}_t - \hat{y}_t^n) + \eta_t \quad (42)$$

## 2.5 Les propriétés du nouveau modèle IS-LM

Les propriétés de ce modèle dépendent fortement de la politique monétaire retenue. Avant d'envisager une politique monétaire qui semble plausible avec le comportement actuel des banques centrales, on peut étudier les propriétés de persistance de l'inflation dans le cas où les autorités monétaires parviennent à stabiliser le revenu au niveau du revenu naturel (qui fluctue) à chaque période. Dans ce cas, la courbe de Phillips devient :

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \eta_t$$

En itérant cette équation vers le futur, lorsque le choc inflationniste suit un AR(1) :  $\eta_t = \rho \eta_{t-1} + \varepsilon_t$  avec  $0 \leq \rho < 1$ , il vient :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_t &= \eta_t + \beta E_t \eta_{t+1} + \beta^2 E_t \eta_{t+2} + \dots \\ &= \eta_t + \beta \rho \eta_t + \beta^2 \rho^2 \eta_t + \dots = \frac{\eta_t}{1 - \beta \rho} \\ &= \rho \hat{\pi}_{t-1} + \frac{\varepsilon_t}{1 - \beta \rho} \end{aligned}$$

On ne peut donc rendre compte, dans ce cas là, de la persistance de l'inflation que lorsque le choc inflationniste est lui-même persistant.

## 3 Règle et discrétion

La nécessité d'instaurer une règle plutôt que de laisser les autorités monétaires agir de façon discrétionnaire provient de la présence éventuelle d'un conflit entre les objectifs de court terme et ceux de plus long terme. Dans certains cas, le décideur peut avoir intérêt à se "lier les mains" par une règle pour ne pas revenir sur une décision. Lorsque ce cas de figure se présente, on parle d'incohérence temporelle des choix. Ce qui est optimal *ex ante* ne l'est pas nécessairement *ex post* et inversement. Le problème est que ce qui justifie justement le recours à une règle (l'incohérence temporelle) explique également pourquoi le décideur peut être tenté de dévier de la règle qu'il s'est imposée... Nous allons voir que ces problèmes dépendent de manière cruciale de la manière dont les objectifs du décideur sont liés aux contraintes et aux anticipations de marché.

### 3.1 Le cas d'objectifs compatibles

L'objectif que l'on prête aux autorités monétaires, depuis Barro et Gordon (1983), est la minimisation d'un critère de perte quadratique qui dépend des

écarts d'output et d'inflation par rapport à une cible. Il s'agit donc d'un objectif de stabilisation. Le caractère intertemporel de l'objectif apparaît explicitement sous la forme d'une somme pondérée d'objectifs instantanés.

Supposons, dans un premier temps, que les autorités monétaires ont pour objectif de réduire l'écart de l'inflation à sa cible de long terme ( $\hat{\pi}_t$ ) et ne se préoccupent, en plus, que de l'écart du revenu courant au revenu naturel, celui qui s'établirait s'il n'y avait pas de rigidité nominale. Le critère de perte intertemporelle des autorités monétaires,  $\mathcal{L}_t$ , s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_t = E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \beta^\tau \left[ (\hat{\pi}_{t+\tau})^2 + \lambda (\hat{y}_{t+\tau} - \hat{y}_{t+\tau}^n)^2 \right] \quad (43)$$

$\lambda$  représente le poids de la stabilisation du revenu (autour du revenu naturel) par rapport à celui de la stabilisation de l'inflation (implicitement, 1) et  $\beta$  ( $< 1$ ) est le même facteur d'actualisation que celui utilisé par les consommateurs. Les contraintes sont simplement la courbe de Phillips (NK) et la courbe IS (intertemporelle) que l'on rappelle par commodité :

$$\hat{y}_t = E_t \hat{y}_{t+1} - \sigma (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) + \varepsilon_{yt} \quad (44)$$

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \alpha (\hat{y}_t - \hat{y}_t^n) \quad (45)$$

Les autorités monétaires peuvent agir sur l'inflation indirectement, en modifiant le taux d'intérêt nominal qui, à son tour, affecte le niveau de revenu. C'est sans doute cette vision des mécanismes de transmission qui est la plus naturelle dans ce modèle où la demande de monnaie n'est pas explicitée. Le programme des autorités pourrait donc consister en un choix de triplets  $(\hat{i}_t, \hat{\pi}_t, \hat{y}_t)$  sous les contraintes (44) et (45) afin de maximiser (43). Néanmoins, comme le taux d'intérêt n'entre pas dans les objectifs (finaux) des autorités monétaires, il est plus facile de supposer que les autorités contrôlent directement le taux d'inflation (ou le revenu) et de négliger ainsi la courbe IS. En notant  $x_t = y_t - y_t^n$  ( $= \hat{y}_t - \hat{y}_t^n$ ) l'écart du revenu courant au revenu naturel, le programme des autorités monétaires peut se réécrire plus simplement :

$$\begin{aligned} \min_{(\hat{\pi}_{t+\tau}, x_{t+\tau})} \quad & E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \beta^\tau \left[ \hat{\pi}_{t+\tau}^2 + \lambda x_{t+\tau}^2 \right] \\ \text{s.c.} \quad & \hat{\pi}_{t+\tau} = \beta E_{t+\tau} \hat{\pi}_{t+\tau+1} + \alpha x_{t+\tau} \end{aligned} \quad (\text{ENGAGEMENT})$$

Une fois les solutions  $\hat{\pi}_{t+\tau}$ ,  $x_{t+\tau}$  (et donc  $\hat{y}_{t+\tau}$ ) de ce problème connues, la courbe IS permet de trouver la valeur du taux d'intérêt qui permet à chaque période de mettre en oeuvre ce résultat.

Poser ce programme signifie que l'on suppose que les autorités monétaires sont capables de s'engager sur les valeurs futures de l'inflation et de l'output et, par là-même, de contrôler les anticipations des agents privés. Lorsque l'on réfute cette hypothèse, on restreint le choix des autorités monétaires au choix des

valeurs courantes de l'inflation et du revenu et on suppose qu'elles prennent les anticipations comme données. Le problème se réécrit alors plus simplement :

$$\begin{aligned} \min_{(\hat{\pi}_t, x_t)} \quad & \hat{\pi}_t^2 + \lambda x_t^2 \\ \text{s.c.} \quad & \hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \alpha x_t \end{aligned} \quad (\text{DISCRETION})$$

où  $E_t \hat{\pi}_{t+1}$  est pris comme donné. La solution de ce programme, qu'il est convenu d'appeler la solution discrétionnaire, est très simple. Après quelques manipulations, les conditions de premier ordre se réécrivent :

$$x_t = -\frac{\alpha}{\lambda} \hat{\pi}_t \quad (46)$$

et,

$$\hat{\pi}_t = \left( \frac{\lambda\beta}{\alpha^2 + \lambda} \right) E_t \hat{\pi}_{t+1} \quad (47)$$

La première équation indique le caractère contracyclique de la politique monétaire : à la suite d'un choc inflationniste (une baisse du revenu naturel), les autorités monétaires choisissent de reporter une partie de ce choc sur l'inflation (qui augmente) et une partie sur le revenu (qui diminue). Cet arbitrage dépend étroitement de deux paramètres : le coefficient de préférence des autorités monétaires pour la stabilisation du revenu  $\lambda$  et le poids de la force de rappel dans la courbe de Phillips,  $\alpha$ . Lorsque  $\lambda$  est faible, la Banque Centrale préfère reporter une grande part du choc inflationniste sur le revenu. Cet arbitrage sera d'autant plus facile à réaliser que l'inflation sera sensible au revenu : une hausse du taux d'intérêt permet de réduire la demande ce qui entraîne une pression à la baisse sur l'inflation d'autant plus forte que  $\alpha$  est élevé.

En réintroduisant ce résultat dans la courbe de Phillips, on obtient l'équation (47) qui fait dépendre l'inflation contemporaine de l'inflation future anticipée. On vérifie aisément que le terme entre parenthèse est inférieur à l'unité, ce qui signifie que l'équilibre est déterminé<sup>10</sup>. En itérant cette expression vers le futur, on trouve :

$$\hat{\pi}_t = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lambda\beta}{\alpha^2 + \lambda} \right)^\tau E_t \hat{\pi}_{t+\tau}$$

Si le terme  $E_t \hat{\pi}_{t+\tau}$  est fini, la solution de cette équation est  $\hat{\pi}_t = 0$ . On en tire évidemment  $x_t = 0$ , d'après l'équation (46). Le critère de perte des autorités monétaires est alors à son minimum, soit  $\mathcal{L}_t = 0$ , si cette solution est appliquée à chaque période. Comme la solution avec engagement ne peut être meilleure (ni moins bonne), cela démontre qu'il est équivalent de résoudre les deux programmes dans ce contexte.

Ce résultat est en fait trivial dès que l'on observe que les programmes ENGAGEMENT et DISCRETION n'ont plus réellement de composante stochastique. En

<sup>10</sup>Le concept de détermination d'un équilibre sera explicité dans la section suivante.

cherchant à stabiliser le revenu autour de sa composante naturelle, on renonce en fait à vouloir stabiliser les chocs d'offre qui sont les seuls à poser problème. En effet, en choisissant le taux d'intérêt adéquat, les autorités monétaires peuvent compenser l'effet d'un choc de demande sur le revenu, évitant en même temps une répercussion de ce choc sur l'inflation *via* la courbe de Phillips.

Pour qu'un conflit existe entre les objectifs de stabilisation des autorités monétaires, il faut soit qu'un choc inflationniste supplémentaire affecte la courbe de Phillips, soit que l'objectif des autorités monétaire soit de stabiliser le revenu autour d'une autre cible que le revenu naturel. La première hypothèse a été étudiée par Clarida, Gertler & Gali (1999) qui supposent la présence d'un choc sur les coûts de production indépendant du choc de productivité (*cost push choc*). Nous allons maintenant explorer la seconde hypothèse en supposant que les autorités monétaires cherchent à réduire les variations de l'emploi en stabilisant le revenu autour de sa composante de long terme.

### 3.2 Le cas d'objectifs conflictuels

Lorsque les autorités monétaires cherchent à stabiliser le revenu autour de son *trend* de long terme, la fonction de perte intertemporelle se réécrit :

$$\mathcal{L}_t = E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \beta^\tau [\hat{\pi}_{t+\tau}^2 + \lambda \hat{y}_{t+\tau}^2] \quad (48)$$

les contraintes étant toujours (44) et (45). Reprenons, dans ce cas, le programme donnant la solution discrétionnaire.

#### 3.2.1 La politique discrétionnaire

Le programme s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{(\hat{\pi}_t, \hat{y}_t)} \quad & \hat{\pi}_t^2 + \lambda \hat{y}_t^2 \\ \text{s.c.} \quad & \hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \alpha \hat{y}_t + \varepsilon_{\pi t} \end{aligned} \quad (\text{DISCRETION})$$

où  $E_t \hat{\pi}_{t+1}$  est toujours pris comme donné et où l'on a adopté la formulation plus traditionnelle de la courbe de Phillips (39). Les solutions de ce programme sont :

$$\hat{y}_t = -\frac{\alpha}{\lambda} \hat{\pi}_t \quad (49)$$

et,

$$\hat{\pi}_t = \frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda} (\beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \varepsilon_{\pi t})$$

La première condition est (presque) identique à l'équation (46), mais le revenu est désormais en écart à sa valeur de long terme et non plus au revenu naturel et la seconde équation intègre explicitement une composante stochastique. En itérant cette équation vers le futur, il vient :

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_t &= AE_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} (A\beta)^\tau \varepsilon_{\pi t+\tau} + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lambda\beta}{\alpha^2 + \lambda} \right)^\tau E_t \hat{\pi}_{t+\tau} \\ &= AE_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} (A\beta)^\tau \varepsilon_{\pi t+\tau}\end{aligned}\quad (50)$$

avec  $A = \frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda}$ . Si on suppose que le choc d'inflation suit un AR(1) de type<sup>11</sup> :  $\varepsilon_{\pi t+1} = \rho\varepsilon_{\pi t} + \eta_{t+1}$  avec  $|\rho| < 1$  et où  $\eta_{t+1}$  est un bruit blanc, cette expression se réécrit, après simplification :

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_t &= \frac{\lambda}{\alpha^2 + (1 - \beta\rho)\lambda} \varepsilon_{\pi t} \\ &= \ell_\pi \left( \begin{matrix} \rho, \lambda, \alpha \\ +, +, - \end{matrix} \right) \varepsilon_{\pi t}\end{aligned}\quad (51)$$

et le revenu est donné par :

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= -\frac{\alpha}{\lambda} \ell_\pi \varepsilon_{\pi t} = \frac{-\alpha}{\alpha^2 + (1 - \beta\rho)\lambda} \varepsilon_{\pi t} \\ &= -\ell_y \left( \begin{matrix} \rho, \lambda, \alpha \\ +, -, ? \end{matrix} \right) \varepsilon_{\pi t}\end{aligned}\quad (52)$$

L'inflation est d'autant plus sensible au choc inflationniste que  $\lambda$  est élevé, c'est à dire que les autorités pondèrent fortement la stabilisation du revenu par rapport à l'inflation, et que  $\alpha$  est faible. Ce second résultat provient de l'effet du revenu sur l'inflation : en cas de choc positif, les autorités vont accepter une diminution du revenu afin de réduire l'effet de ce choc sur l'inflation, cet arbitrage étant d'autant plus facile à réaliser que l'inflation dépend fortement du revenu. Le degré de persistance du choc,  $\rho$ , a également un effet positif sur l'inflation. Cela est dû à la dimension *forward* de la courbe de Phillips. Plus le choc est persistant, plus élevée est l'inflation future anticipée, plus cela conduit les entreprises à augmenter leur prix dès aujourd'hui.

---

<sup>11</sup>Notons que cela revient à supposer que le choc sur le produit naturel est unique. Dans notre modèle, ce dernier est positivement affecté par la productivité mais également par les dépenses publiques. Il ne s'agit pas réellement d'un choc de demande, au sens keynésien du terme, dans la mesure où il conduit les consommateurs à offrir davantage de travail afin de ne pas trop réduire leur consommation. L'effet d'éviction est en partie reporté sur le loisir. Nous négligeons, ici, ce type de choc.

A partir des équations (51) et (52), on peut facilement calculer l'écart type (non conditionnel) de l'inflation et du revenu en fonction de celui du bruit blanc. On obtient :

$$\sigma_\pi = \ell_\pi(\rho, \lambda, \alpha) \sigma_\eta \quad (53)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \ell_\pi(\rho, \lambda, \alpha) \sigma_\eta \quad (54)$$

En combinant ces deux expressions de manière à faire disparaître  $\lambda$ , il vient :

$$\sigma_\pi = \frac{\sigma_\eta - \alpha\sigma_y}{1 - \beta\rho}$$

Cette expression représente la frontière efficiente correspondant à une politique discrétionnaire. Quel que soit le coefficient  $\lambda$  traduisant les préférences des autorités en matière de stabilisation du revenu, on ne pourra jamais se situer au dessous de celle-ci (dans le plan  $(\sigma_y, \sigma_\pi)$ ).

Nous allons voir que la solution discrétionnaire n'est pas aussi bonne que la solution avec engagement lorsque la Banque Centrale cherche à stabiliser le revenu autour de sa valeur de long terme. Cette constatation permettra de comprendre l'intérêt que représente le recours à une règle (l'engagement) mais également d'identifier les problèmes de crédibilité liés à son usage

### 3.2.2 La règle avec engagement<sup>(\*)</sup>

Lorsque les autorités monétaires sont capables de s'engager sur leurs actions futures, elles peuvent influencer les anticipations des agents privés, ce qui leur donne un moyen supplémentaire pour agir sur l'inflation contemporaine (voir la courbe de Phillips NK), mais cela leur permet, plus généralement, de mieux répartir un choc sur les différentes périodes. Les préférences des autorités monétaires étant convexes, elles préfèrent naturellement "étaier" la gestion d'un choc d'inflation sur plusieurs périodes.

Le programme avec engagement est le suivant :

$$\begin{aligned} \min_{(\hat{\pi}_{t+\tau}, x_{t+\tau})} \quad & \mathcal{L}_t = E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \beta^\tau [\hat{\pi}_{t+\tau}^2 + \lambda \hat{y}_{t+\tau}^2] \\ \text{s.c.} \quad & \hat{\pi}_{t+\tau} = \beta E_{t+\tau} \hat{\pi}_{t+\tau+1} + \alpha \hat{y}_{t+\tau} + \varepsilon_{\pi t+\tau} \end{aligned} \quad (\text{ENGAGEMENT})$$

Construisons le lagrangien de ce programme. On obtient :

$$L_t = E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \beta^\tau \{ [\hat{\pi}_{t+\tau}^2 + \lambda \hat{y}_{t+\tau}^2] - \mu_{t+\tau} [\hat{\pi}_{t+\tau} - \beta \hat{\pi}_{t+\tau+1} - \alpha \hat{y}_{t+\tau} - \varepsilon_{\pi t+\tau}] \}$$

où  $\mu_{t+\tau}$  représente le multiplicateur de Lagrange actualisé correspondant à la contrainte de la période  $t + \tau$ . Les conditions de premier ordre s'écrivent :

$$0 = \frac{\partial L_t}{\partial \hat{\pi}_{t+\tau}} = E_t [2\beta^\tau \hat{\pi}_{t+\tau} - \beta^\tau \mu_{t+\tau} + \beta^\tau \mu_{t+\tau-1}] \quad (55)$$

$$0 = \frac{\partial L_t}{\partial \hat{y}_{t+\tau}} = E_t [2\beta^\tau \lambda \hat{y}_{t+\tau} + \beta^\tau \mu_{t+\tau} \alpha] \quad (56)$$

Comme il s'agit, ici, de déterminer une règle de comportement et qu'aucun choc exogène n'entre dans les conditions de premier ordre, celles-ci peuvent se réécrire sans l'opérateur d'espérance. En combinant (55) et (56), on trouve les solutions suivantes :

$$\hat{y}_t = -\frac{\alpha}{\lambda} \hat{\pi}_t \quad (57)$$

$$\hat{y}_{t+\tau+1} - \hat{y}_{t+\tau} = -\frac{\alpha}{\lambda} \hat{\pi}_{t+\tau+1} \quad \forall \tau \geq 0 \quad (58)$$

La première condition est identique à celle du programme discrétionnaire. Elle est valable pour la période initiale ( $t$ ) uniquement si l'on pose la condition  $\mu_{t-1} = 0$ . Pour les autres périodes, la relation est radicalement différente et relie le taux d'inflation à la variation de l'écart d'output plutôt qu'à son niveau. Le problème d'incohérence temporelle provient de cette différence. Les autorités monétaires n'ont pas intérêt à adopter aujourd'hui le comportement qu'elles annoncent pour le futur.

Lorsque les autorités monétaires se sont engagé en  $t - 1$  à respecter la règle, elles renoncent à la condition initiale ( $\mu_{t-1} = 0$ ) et adoptent la solution (58) pour tout  $\tau$ . On a donc, également pour la période  $t$  :  $\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1} = -\frac{\alpha}{\lambda} \hat{\pi}_t$ . Cette solution semble aussi être plus raisonnable si la période  $t$  représente la date de la mise en oeuvre d'une nouvelle politique, avec engagement, et que la Banque Centrale souhaite ainsi asseoir la crédibilité de sa politique.

En introduisant (58) dans la courbe de phillips en  $t$ , on obtient :

$$\hat{y}_t = a\hat{y}_{t-1} + \beta a E_t \hat{y}_{t+1} - \frac{\alpha a}{\lambda} \varepsilon_{\pi t} \quad (59)$$

avec  $a = \frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda(1+\beta)}$ . Cette équation est à la fois tournée vers le futur et vers le passé. Le polynôme associé à cette forme possède deux racines dont une qui doit être supérieure à l'unité et l'autre inférieure pour que l'équilibre associé soit déterminé (point selle). Lorsque c'est le cas, la solution doit pouvoir s'écrire sous la forme :

$$\hat{y}_t = \kappa \hat{y}_{t-1} + b \varepsilon_{\pi t} \quad (60)$$

avec  $\kappa < 1$ . On peut alors résoudre l'équation (59) par la méthode des coefficients indéterminés (les paramètres  $\kappa$  et  $b$  de (60)). On trouve :

$$\hat{y}_t = \kappa \hat{y}_{t-1} - \frac{\alpha \kappa}{\lambda (1 - \kappa \beta \rho)} \varepsilon_{\pi t} \quad (61)$$

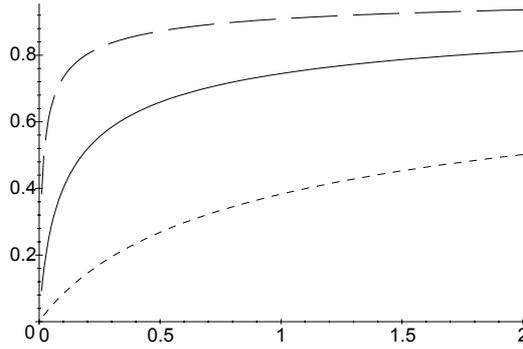
avec  $\kappa = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta\alpha^2}}{2\beta\alpha} < 1$ , et la solution pour l'inflation s'obtient après quelques calculs en utilisant (58) ; on obtient :

$$\hat{\pi}_t = \frac{\lambda(1 - \kappa)}{\alpha} \hat{y}_{t-1} + \frac{\kappa}{(1 - \kappa\beta\rho)} \varepsilon_{\pi t}$$

que l'on peut également exprimer sous la forme :

$$\hat{\pi}_t = \kappa \hat{\pi}_{t-1} + \frac{\kappa}{(1 - \kappa\beta\rho)} (\varepsilon_{\pi t} - \varepsilon_{\pi t-1}) \quad (62)$$

On peut facilement vérifier, analytiquement, que la valeur du coefficient optimal  $\kappa$  est une fonction croissante du paramètre de préférence des autorités monétaires pour la stabilisation du revenu,  $\lambda$ , et décroissante du paramètre  $\alpha$  qui mesure le poids de la force de rappel de la courbe de Phillips<sup>12</sup>. Sur le graphique suivant, on a représenté  $\kappa$  en fonction  $\lambda$ , et ce, pour différentes valeurs de  $\alpha$  (de haut en bas :  $\alpha = 0.1, 0.3, 1$ ) :



$\kappa$  en fonction de  $\lambda$  ( $\beta = .99$ ,  $\alpha = 0.1, 0.3, 1$ )

Par ailleurs,  $\kappa$  ne dépend pas de  $\rho$ , le coefficient d'autocorrélation des chocs. La forme autorégressive de la règle de politique monétaire (62) ne provient donc pas de la persistance des chocs. Pour comprendre la raison d'une telle règle, il faut inspecter le critère de perte des autorités monétaire et la courbe de Phillips. La forme quadratique et intertemporelle de la fonction de perte nous apprend que les autorités monétaires ont des préférences convexes sur l'inflation et le revenu contemporain, mais également sur les revenus (et l'inflation) futurs. Dans ce cas, la Banque Centrale, si elle le peut, a intérêt à répartir un choc inflationniste sur différentes périodes plutôt qu'en supporter tout le poids aujourd'hui. La forme spécifique de la courbe de Phillips NK lui permet justement un tel arbitrage. Réécrivons l'équation de cette courbe en l'itérant vers le futur. Il vient :

$$\hat{\pi}_t = E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \beta^\tau (\alpha \hat{y}_{t+\tau} + \varepsilon_{\pi t+\tau})$$

<sup>12</sup>  $\kappa$  est donc fonction croissante du degré de rigidités nominales.

L'inflation présente est fonction d'une somme pondérée des écarts futurs de l'output au revenu de long terme. A la suite d'un choc inflationniste, l'adoption de la règle (62) permet de ne pas reporter la totalité de l'ajustement à la baisse sur le revenu contemporain, mais de "lisser" cet ajustement sur plusieurs périodes. Pour qu'un tel report soit possible, il faut que les autorités monétaires convainquent les agents que la politique sera orientée dans la même direction pendant les périodes suivantes. C'est l'objectif d'une règle d'objectif persistante.

L'adoption de ce type de règle par les autorités monétaires ne va pourtant pas de soi. La première difficulté réside dans la tentation pour la Banque Centrale de dévier d'une règle récursive pour la période en cours. Pour résister à cette tentation, il faut que le coût de la déviation soit supérieur au gain attendu. Le coût de la déviation peut être constitué de la perte de réputation de la Banque Centrale, mais également de sanctions plus directes pour son gouverneur comme la mise en jeu de son poste... Mais dans ce dernier cas, si le gouvernement contrôle le gouverneur de la Banque Centrale, qui contrôle le gouvernement ? En fait, depuis ces vingt dernières années, les économies occidentales ont plutôt opté pour des statuts d'indépendance de leur Banque Centrale. Cela ne garantit pas nécessairement l'adoption de règle de premier rang par ces dernières, mais permet une certaine stabilité qui peut conférer à la politique monétaire, même discrétionnaire, une efficacité satisfaisante si le gouverneur de la Banque Centrale est judicieusement choisi.

### 3.2.3 Le Banquier Central conservateur

Dans un article influent, Rogoff (1985) a démontré qu'en choisissant un banquier central plus conservateur - *i.e.* avec un  $\lambda$  plus petit - que l'agent représentatif, il était possible d'améliorer considérablement l'efficacité des politiques discrétionnaires. Nous allons voir que ce résultat, initialement démontré dans le cadre d'un modèle stochastique à la Barro-Gordon (1983) contenant une courbe de Phillips issue d'une courbe d'offre de Lucas, reste vrai avec une courbe de Phillips NK dès lors que les chocs inflationnistes sont persistants.

Notons  $\tilde{\lambda}$ , le paramètre de préférence pour la stabilisation du revenu de ce gouverneur. Les solutions de l'équilibre discrétionnaire sont données par les équations (51) et (52) en remplaçant  $\lambda$  par  $\tilde{\lambda}$ . :

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_t &= \ell_\pi(\tilde{\lambda}) \varepsilon_{\pi t} \\ \hat{y}_t &= -\frac{\alpha}{\tilde{\lambda}} \ell_\pi(\tilde{\lambda}) \varepsilon_{\pi t}\end{aligned}$$

avec  $\ell_\pi(\tilde{\lambda}) = \frac{\tilde{\lambda}}{\alpha^2 + (1-\beta\rho)\tilde{\lambda}}$ . En réintroduisant ces résultats dans la "vraie" fonction

de perte intertemporelle, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t &= E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \beta^\tau [\hat{\pi}_{t+\tau}^2 + \lambda \hat{y}_{t+\tau}^2] \\ &= \left[ 1 + \lambda \left( \frac{\alpha}{\tilde{\lambda}} \right)^2 \right] \left[ \ell_\pi(\tilde{\lambda}) \right]^2 E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} \beta^\tau \varepsilon_{\pi t+\tau}\end{aligned}$$

En cherchant la valeur de  $\tilde{\lambda}$  qui minimise ce critère de perte, on trouvera le paramètre de préférence correspondant au niveau de conservatisme optimal. Après quelques calculs, il vient :

$$\tilde{\lambda} = (1 - \beta\rho) \lambda$$

Il est utile de construire un indicateur du “degré de conservatisme” du gouverneur optimal. Soit  $\gamma^* = 1 - \tilde{\lambda}/\lambda = \beta\rho$ , ce degré de conservatisme. Il vérifie toujours  $0 \leq \gamma^* < 1$  et  $\gamma^* = 0$  si  $\rho = 0$ . Lorsque les chocs sont persistants, le choix d’un gouverneur plus conservateur est toujours efficace car il permet aux agents d’anticiper une politique monétaire plus restrictive dans l’avenir à la suite d’un choc inflationniste. Cela permet, bien qu’imparfaitement, de répliquer le type de mécanisme qu’une règle récursive engendre. Néanmoins, cette délégation s’avère impossible lorsque les chocs sont indépendants d’une période à l’autre.

Une autre solution envisagée consiste à choisir une règle plus facilement identifiable par les agents que la règle optimale. En effet, le caractère stochastique de l’objectif (62), malgré sa persistance, et la déconnexion apparente du taux d’intérêt à cet objectif<sup>13</sup> rendent difficilement crédible l’adhésion des autorités monétaires à ce type de règle. C’est en partie pour cette raison que l’on s’intéresse à une classe de règle plus simples : les règles d’instruments ou, règles opératoires. Nous allons étudier la plus célèbre d’entre-elles : la règle de Taylor, ainsi que quelques-unes de ses extensions.

## 4 Les règles opératoires

Les travaux de Taylor (1993) sont à l’origine d’un regain d’intérêt certain des économistes pour l’utilisation de règles simples afin de représenter le comportement des Banques Centrales. De telles règles avaient déjà été utilisées dans le passé dans des maquettes de modèles macroéconométriques mais avaient été abandonnées au profit de règles de contrôle des agrégats monétaires (ou de leur taux de croissance) plus conforme aux thèses monétaristes alors très répandues.

<sup>13</sup>On rappelle que le taux d’intérêt est également utilisé pour compenser les chocs de demande).

La règle étudiée par Taylor peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\hat{i}_t = \varphi_\pi \hat{\pi}_t + \varphi_y \hat{y}_t$$

avec, dans le cas des Etats Unis et pour les années quatre-vingt, des valeurs respectives de 1,5 et 0,5 pour les coefficients  $\varphi_\pi$  et  $\varphi_y$ , ainsi qu'un taux d'inflation cible de 2% et un taux d'intérêt de long terme de 4%. En simulant cette règle à partir des observations concernant le taux d'inflation et le revenu (en écart à son *trend*), les taux d'intérêt obtenus sont relativement proches des taux enregistrés sur cette période.

Dans des travaux ultérieurs, cette règle a été amendée, notamment pour tenir compte des délais de transmission de la politique monétaire. Une variation du taux d'intérêt n'a pas d'effet immédiat sur l'inflation. Une manière simple d'intégrer ces délais dans le modèle de la nouvelle synthèse consiste à supposer que les prix sont fixés une période à l'avance par les entreprises, ce qui revient à accroître le niveau des rigidités nominales. La courbe de Phillips NK se réécrit :

$$\hat{\pi}_t = E_{t-1} [\beta \hat{\pi}_{t+1} + \alpha \hat{y}_t + \varepsilon_{\pi t}]$$

ou, encore :

$$\hat{\pi}_{t+1} = \beta E_t \hat{\pi}_{t+2} + \alpha E_t \hat{y}_{t+1} + \rho \varepsilon_{\pi t} \quad (63)$$

Dans un tel cas de figure, inclure l'inflation contemporaine dans la règle des autorités monétaires peut manquer de pertinence. Clarida, Gertler et Gali (1998a) étudient et estiment sur données européennes la règle monétaire suivante :

$$\hat{i}_t = \delta \hat{i}_{t-1} + (1 - \delta) [\varphi_\pi E_t \hat{\pi}_{t+1} + \varphi_y \hat{y}_t] + \varepsilon_{it} \quad (64)$$

L'inflation contemporaine a été remplacée par l'inflation future anticipée et la présence d'un terme d'erreur,  $\varepsilon_{it}$ , peut traduire l'existence d'erreurs d'appréciation par les autorités monétaires des anticipations d'inflations du marché.

Le paramètre  $\delta$  est un indicateur de l'inertie de la règle monétaire. Celle-ci peut s'expliquer de plusieurs manières. En premier lieu, les autorités peuvent souhaiter ne pas déstabiliser les marchés financiers en opérant de trop brusques changements du taux d'intérêt à court terme. Un autre argument souvent avancé est lié à l'hypothèse de connaissance imparfaite des paramètres du modèle par les autorités monétaires. Dans un tel cas, la politique monétaire optimale est (presque) toujours plus prudente que dans le cas d'une connaissance parfaite du modèle de l'économie. La traduction de cette prudence par une inertie du taux d'intérêt est alors une approximation, sans doute contestable sur le plan théorique, mais pratique à des fins d'estimations. Le dernier argument, enfin, est sans doute le plus convainquant : Woodford et Rotemberg (1997) et Woodford (1999) ont montré qu'un certain degré d'inertie de la politique monétaire permettait d'en renforcer la crédibilité. En respectant une fonction de réaction de type (64), les autorités monétaires modifient durablement les taux d'intérêt à la suite d'un choc

réclamant justement un changement durable de la politique de taux. Comme nous l'avons vu, une règle (d'objectif) avec engagement nécessiterait une orientation durable de la politique monétaire afin de répartir les chocs sur plusieurs périodes. Il s'agit d'un comportement traditionnel de "lissage intertemporel". Un certain degré d'inertie dans la politique de taux permet de se rapprocher de cet objectif.

Le modèle théorique linéarisé que nous allons étudier est constitué de l'équation IS intertemporel, de la courbe de Phillips NK avec prédétermination des prix (63) et de la règle de politique monétaire (64) :

$$\hat{y}_t = E_t \hat{y}_{t+1} - \sigma (\hat{i}_t - \hat{\pi}_{t+1}) + \varepsilon_{yt} \quad (65)$$

$$\hat{\pi}_{t+1} = \beta E_t \hat{\pi}_{t+2} + \alpha E_t \hat{y}_{t+1} + \rho \varepsilon_{\pi t} \quad (66)$$

$$\hat{i}_t = \delta \hat{i}_{t-1} + (1 - \delta) [\varphi_\pi \hat{\pi}_{t+1} + \varphi_y \hat{y}_t] + \varepsilon_{it} \quad (67)$$

#### 4.1 Le cas simple d'un modèle uniquement tourné vers le futur

Dans le cas simplifié  $\delta = 0$  et  $\varepsilon_{it} = 0 \forall t$ , le système précédent peut se réécrire, en intégrant (67) et (66) dans (65), sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_t \\ \hat{\pi}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(1 - \alpha(\varphi_\pi - 1)\sigma) & -k\beta(\varphi_\pi - 1)\sigma \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} E_t \begin{pmatrix} \hat{y}_{t+1} \\ \hat{\pi}_{t+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & -(\varphi_\pi - 1)\sigma k\rho \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{\pi t} \end{pmatrix}$$

avec  $k = (1 + \sigma\varphi_y)^{-1}$  ou, sous forme abrégée :

$$X_t = \mathbf{A}E_t X_{t+1} + \mathbf{B}\epsilon_t \quad (68)$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{B}$  une matrice  $2 \times 2$ ,  $X_t = (\hat{y}_t, \hat{\pi}_t)'$  et  $\epsilon_t = (\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{\pi t})'$ . On suppose que les chocs sont autocorrélés :

$$\epsilon_{t+1} = \mathbf{C}\epsilon_t + \eta_{t+1} \quad (69)$$

où  $\mathbf{C}$  est une matrice  $2 \times 2$  et où  $E_t \eta_{t+1} = \mathbf{0}_{2 \times 1}$ .

Les composantes du vecteur  $X_t$  sont non prédéterminées. On cherche donc une solution "tournée vers le futur". En notant  $\Omega_t$ , le vecteur colonne  $2 \times 1$  :

$$\Omega_t = \mathbf{B}\epsilon_t, \quad (70)$$

l'équation précédente peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} X_t &= \Omega_t + \mathbf{A}E_t \Omega_{t+1} + \mathbf{A}^2 E_t \Omega_{t+2} + \dots + \mathbf{A}^n E_t \Omega_{t+n} + \mathbf{A}^{n+1} E_t X_{t+n+1} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbf{A}^i E_t \Omega_{t+i} + \mathbf{A}^{n+1} E_t X_{t+n+1} \end{aligned}$$

Si les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont à l'intérieur du disque unité, alors  $\mathbf{A}^{n+1}$  tend vers  $\mathbf{0}_{2 \times 2}$  quand  $n$  tend vers l'infini. On a donc :

$$X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{A}^i E_t \Omega_{t+i}$$

D'après (69) et (70), on a :

$$\begin{aligned} E_t \Omega_{t+1} &= \mathbf{BCB}^{-1} \Omega_t, \\ E_t \Omega_{t+i} &= (\mathbf{BCB}^{-1})^i \Omega_t, \end{aligned}$$

En injectant cette forme dans l'équation précédente, on obtient :

$$X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} (\mathbf{ABC B}^{-1})^i \Omega_t$$

que l'on peut réécrire :

$$X_t = [\mathbf{I}_{2 \times 2} - \mathbf{ABC B}^{-1}]^{-1} \Omega_t$$

si la matrice  $[\mathbf{I}_{2 \times 2} - \mathbf{ABC B}^{-1}]$  est inversible.

La solution de l'équation (68) est alors simplement :

$$X_t = \mathbf{D} \epsilon_t$$

où  $\mathbf{D}$  est une matrice  $2 \times 2$  définie par :

$$\mathbf{D} = [\mathbf{I}_{2 \times 2} - \mathbf{ABC B}^{-1}]^{-1} \mathbf{B}$$

Dans notre cas, si on suppose que la matrice d'autocorrélation des chocs est de la forme  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ , la matrice  $\mathbf{D}$  s'écrit :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\beta\rho) + \frac{(\varphi_\pi-1)}{(1+\sigma\varphi_y)} \alpha\sigma\rho(\rho-\nu)}{(1-\beta\rho)(1+\sigma\varphi_y-\nu) + \alpha\sigma\rho(\varphi_\pi-1)} & -\frac{(1+\sigma\varphi_y+\rho-\nu) \frac{(\varphi_\pi-1)}{(1+\sigma\varphi_y)} \sigma\rho}{(1-\beta\rho)(1+\sigma\varphi_y-\nu) + \alpha\sigma\rho(\varphi_\pi-1)} \\ \frac{\alpha\nu}{(1-\beta\rho)(1+\sigma\varphi_y-\nu) + \alpha\sigma\rho(\varphi_\pi-1)} & \frac{(1+\sigma\varphi_y-\nu)\rho}{(1-\beta\rho)(1+\sigma\varphi_y-\nu) + \alpha\sigma\rho(\varphi_\pi-1)} \end{pmatrix}$$

On peut alors trouver les solutions explicites pour  $\hat{y}_t$  et  $\hat{\pi}_{t+1}$  :

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= \frac{\left[ (1-\beta\rho) + \frac{(\varphi_\pi-1)}{(1+\sigma\varphi_y)} \alpha\sigma\rho(\rho-\nu) \right] \epsilon_{yt} - (1+\sigma\varphi_y+\rho-\nu) \frac{(\varphi_\pi-1)}{(1+\sigma\varphi_y)} \sigma\rho \epsilon_{\pi t}}{(1-\beta\rho)(1+\sigma\varphi_y-\nu) + \alpha(\varphi_\pi-1)\sigma\rho} \\ \hat{\pi}_{t+1} &= \frac{\alpha\nu \epsilon_{yt} + (1+\sigma\varphi_y-\nu)\rho \epsilon_{\pi t}}{(1-\beta\rho)(1+\sigma\varphi_y-\nu) + \alpha(\varphi_\pi-1)\sigma\rho} \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que le choix d'une valeur élevée du coefficient  $\varphi_y$  permet de stabiliser le revenu (mais pas l'inflation, face au chocs d'offre) et que le choix d'un coefficient  $\varphi_\pi$  élevé permet de stabiliser l'inflation (mais pas le revenu). Il existe donc bien un arbitrage entre revenu et inflation face aux chocs d'offre. Cet arbitrage est néanmoins limité par un ensemble de conditions qui garantissent la détermination de l'équilibre. Dans notre cas, il faut que les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  soient inférieures à l'unité. On peut montrer, en se restreignant aux valeurs positives des coefficients  $\varphi_y$  et  $\varphi_\pi$ , que cette condition est respectée si et seulement si on a :

$$-(1 - \beta) \varphi_y < \alpha (\varphi_\pi - 1) < (1 + \beta) (\varphi_y + 2\sigma)$$

La dépendance du taux d'intérêt au taux d'inflation ne doit donc être ni trop faible ni trop forte. Dans le cas contraire, l'équilibre macroéconomique est indéterminé et des équilibres à tâches solaires (à anticipations auto-réalisatrices) peuvent apparaître. Ceci a été montré par Bernanke & Woodford (1997) dans le cadre de ce modèle et par Clarida, Gertler & Gali (1998b) dans le cadre du modèle plus général avec inertie. Selon ces derniers, on ne peut pas exclure l'hypothèse selon laquelle la politique monétaire de la Fed dans les années soixante-dix aurait été insuffisamment sévère face au choc pétrolier. L'instabilité des prix dans ces années là serait en partie imputable à l'existence d'anticipations autoréalisatrices, elles-mêmes permises par une politique monétaire trop permissive.

## 4.2 Les équilibres à croyances auto-réalisatrices

Afin de comprendre le phénomène de croyances autoréalisatrices, il est préférable de l'étudier dans le cadre d'un modèle encore plus simple que le modèle précédent, en se concentrant sur la dynamique d'une variable unique. Prenons, pour cela, une forme simplifiée du modèle initial en adoptant une courbe IS traditionnelle (n'incorporant pas d'aspect intertemporel) et en reprenant une courbe de Phillips NK sans prédétermination des prix ainsi qu'une règle de Taylor instantanée :

$$\hat{y}_t = -\sigma (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) + \varepsilon_{yt} \quad (71)$$

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \alpha \hat{y}_t + \varepsilon_{\pi t} \quad (72)$$

$$\hat{i}_t = \varphi_\pi \hat{\pi}_t + \varphi_y \hat{y}_t \quad (73)$$

En incorporant (73) dans (71), on obtient :

$$\hat{y}_t = k\sigma (E_t \hat{\pi}_{t+1} - \varphi_\pi \hat{\pi}_t) + k\varepsilon_{yt}$$

avec  $k = (1 + \sigma\varphi_y)^{-1}$ . En utilisant alors ce résultat dans (72), il vient :

$$\hat{\pi}_t = aE_t\hat{\pi}_{t+1} + \varepsilon_t \quad (74)$$

où  $\varepsilon_t = \frac{\alpha\varepsilon_{yt} + (1 + \sigma\varphi_y)\varepsilon_{\pi t}}{1 + \sigma\varphi_y + \alpha\sigma\varphi_\pi}$  est un choc composite, supposé non auto-corrélé par simplicité, et avec :

$$a = \frac{\beta(1 + \sigma\varphi_y) + \alpha\sigma}{1 + \sigma\varphi_y + \alpha\sigma\varphi_\pi}$$

Lorsque  $a < 1$ , l'équation (74) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_t &= E_t \sum_{\tau=0}^{+\infty} a^\tau \varepsilon_{t+\tau} + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} a^\tau E_t \hat{\pi}_{t+\tau} \\ &= \varepsilon_t + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} a^\tau E_t \hat{\pi}_{t+\tau} \end{aligned} \quad (75)$$

dont on peut également donner la forme anticipée :

$$E_t \pi_{t+1} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} a^\tau E_t \hat{\pi}_{t+\tau} \quad (76)$$

avec  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} a^\tau E_t \hat{\pi}_{t+\tau} = 0$  si on exclut les trajectoires hyper-inflationnistes. Ce cas est représenté sur la figure 1 où l'on a retracé la relation entre  $E_t \pi_{t+2}$  et  $E_t \pi_{t+1}$  induite<sup>14</sup> par l'équation (74) lorsque  $a < 1$ .

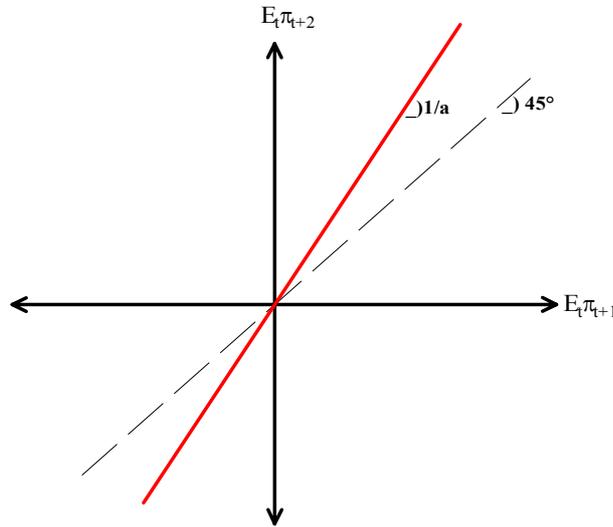


Figure 1 : cas  $a < 1$

On remarque aisément qu'un résultat différent de 0 pour  $E_t \pi_{t+1}$  ne pourrait être associée qu'à une solution explosive, hyper-inflationniste ou hyper-déflationniste. C'est cette particularité qui assure la *détermination* de l'équilibre : il n'existe

<sup>14</sup>Soit :  $E_t \pi_{t+2} = E_t \pi_{t+1}/a$

qu'un seul équilibre à anticipations rationnelles associé à une trajectoire non-explosive du taux d'inflation.

Dans le cas  $a > 1$ , la solution précédente n'est pas applicable car on peut avoir  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} a^\tau E_t \hat{\pi}_{t+\tau} \neq 0$  sans pour autant que cela entraîne une hyper-inflation. Ce cas est représenté sur la figure 2.

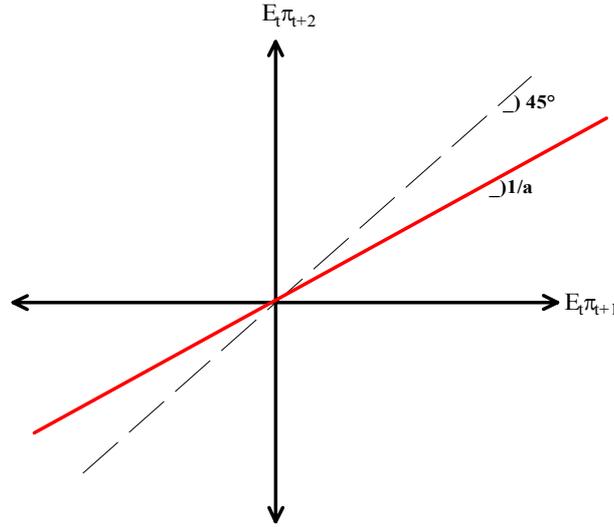


Figure 2 : cas  $a > 1$

Une solution différente de 0 pour  $E_t \pi_{t+1}$  est associée à une trajectoire convergente et ne peut donc pas être exclue. Il existe en fait dans ce cas une infinité de solutions possibles pour  $E_t \pi_{t+1}$ . Plus troublant encore, n'importe quel processus aléatoire exogène continu et borné,  $\xi_t \in [\underline{\xi}, \bar{\xi}]$ , vérifiant  $E_t \xi_t = 0$  peut être introduit dans l'équation récurrente suivante :

$$\hat{\pi}_t = \frac{\hat{\pi}_{t-1}}{a} - \frac{\varepsilon_{t-1}}{a} + \varepsilon_t + \xi_t \quad (77)$$

qui est un équilibre admissible du modèle, vérifiant notamment l'équation (74).

Ce choc exogène est parfois appelé "tâche solaire" en référence à la croyance pré-classique<sup>15</sup> selon laquelle les tâches apparaissant à la surface du soleil auraient un effet sur le cycle économique. Dans notre cas, il peut s'agir de n'importe quelle information extrinsèque, c'est à dire n'ayant pas de rapport avec les fondamentaux économiques, mais susceptible de coordonner les croyances (pessimistes ou optimistes) des agents. Si les agents pensent que le taux d'inflation suit un processus décrit par l'équation (77), alors cette croyance est autoréalisatrice. Le choc économique  $\varepsilon_t$  étant également supposé borné, soit  $\varepsilon_t \in [\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ , cette situation peut

<sup>15</sup>Et reprise par Jevons au 19ème siècle.

être représentée sur la figure suivante :

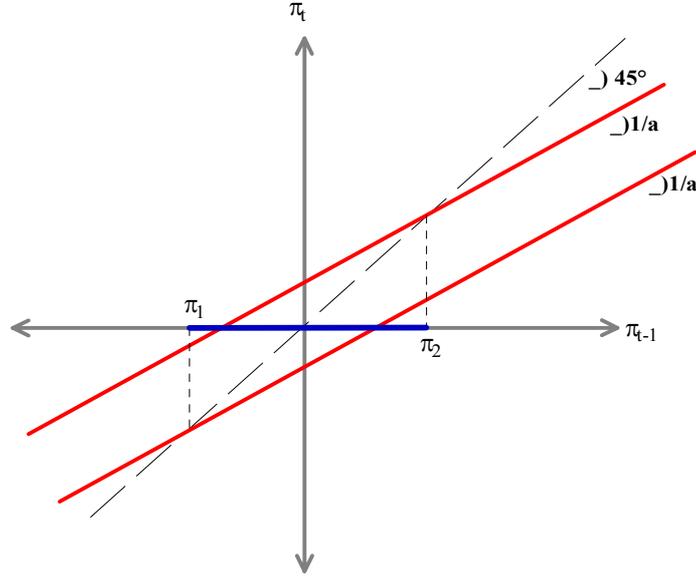


Figure 3

où  $\pi_1 = \frac{a\xi - \bar{\varepsilon}}{1-a}$  et  $\pi_2 = \frac{a\bar{\xi} - \underline{\varepsilon}}{1-a}$ . Les deux droites de pente  $1/a$  représentent les bornes supérieures et inférieures des dynamiques satisfaisant (77). En probabilité, l'état de l'économie doit converger vers "l'ensemble ergodique"  $[\pi_1, \pi_2]$ . Par la suite, l'inflation évolue de manière stochastique dans ce même ensemble, en partie à cause du choc réel et en partie à cause du choc sur les croyances.

Comme on peut le vérifier, une telle construction est impossible lorsque  $a < 1$ . Les tâches solaires ne sont pas admissibles dans ce cas. En reprenant l'expression de  $a$ , la condition d'unicité de l'équilibre, *i.e.* d'absence de tâches solaires, est donnée par :

$$-(1 - \beta)(1 + \sigma\varphi_y) < \alpha\sigma(\varphi_\pi - 1)$$

Si la politique monétaire est trop permissive, *i.e.*  $\varphi_\pi < 1$ , alors cette condition peut ne pas être vérifiée et l'objectif de stabilisation de l'inflation, mais également du revenu, a peu de chances d'être atteint. Dans le modèle complet, avec une courbe IS intertemporelle, ce type de condition se rencontre également, ce qui explique les résultats de Clarida, Gali & Gertler (1998b), mais une limite supérieure apparaît également pour le terme  $\alpha\sigma(\varphi_\pi - 1)$ . La politique monétaire de doit donc être ni trop permissive, ni trop restrictive.

### 4.3 Le cas général<sup>(\*)</sup>

Lorsqu'une variable, autre qu'un choc, intervient dans le système réduit en étant prédéterminée, la méthode de résolution du modèle linéaire à anticipations

rationnelles est plus complexe. Le modèle est simultanément “tourné vers le futur” (*forward looking*), à cause des anticipations et “tourné vers le passé” (*backward looking*), à cause de la (ou des) variable(s) prédéterminée(s). C’est le cas dans notre système complet, que l’on rappelle par convenance, lorsqu’on suppose qu’il y a de l’inertie dans la règle monétaire :

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= E_t \hat{y}_{t+1} - \sigma (\hat{i}_t - \hat{\pi}_{t+1}) + \varepsilon_{yt} \\ \hat{\pi}_{t+1} &= \beta E_t \hat{\pi}_{t+2} + \alpha E_t \hat{y}_{t+1} + \rho \varepsilon_{\pi t} \\ \hat{i}_t &= \delta \hat{i}_{t-1} + (1 - \delta) [\varphi_{\pi} \hat{\pi}_{t+1} + \varphi_y \hat{y}_t] + \varepsilon_{it}\end{aligned}$$

La présence du terme  $\hat{i}_{t-1}$  complique singulièrement le problème et réclame une méthodologie particulière pour le résoudre. En réécrivant ce système sous la forme :

$$\mathbf{A} E_t X_{t+1} = \mathbf{B} X_t + \epsilon_t$$

avec  $X_t = (\hat{y}_t, \hat{\pi}_{t+1}, \hat{i}_{t-1}, \varepsilon_{yt}, \varepsilon_{\pi t})'$ ,  $\epsilon_t = (0, 0, 0, 0, \varepsilon_{it})'$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sigma & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\rho \\ (1 - \delta) \varphi_y & (1 - \delta) \varphi_{\pi} & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix},$$

on distingue les  $n_1 = 2$  premières composantes du vecteur  $X_t$  qui sont des variables non prédéterminées à la période  $t$  (*i.e.* qui dépendent des anticipations des agents) des  $n_2 = 3$  dernières composantes qui correspondent aux variables prédéterminées, incluant dans celles-ci les chocs autocorrélés dans le temps. On montre en annexe que, si la matrice<sup>16</sup>  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$  a  $n_1$  valeurs propres supérieures à l’unité en module et  $n_2$  valeurs propres inférieures à l’unité en module, alors la solution du problème peut s’écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= \omega_y \hat{i}_{t-1} + \omega_{yy} \varepsilon_{yt} + \omega_{y\pi} \varepsilon_{\pi t} + \omega_{yi} \varepsilon_{it} \\ \hat{\pi}_{t+1} &= \omega_{\pi} \hat{i}_{t-1} + \omega_{\pi y} \varepsilon_{yt} + \omega_{\pi\pi} \varepsilon_{\pi t} + \omega_{\pi i} \varepsilon_{it} \\ \hat{i}_t &= \omega_i \hat{i}_{t-1} + \omega_{iy} \varepsilon_{yt} + \omega_{i\pi} \varepsilon_{\pi t} + \omega_{ii} \varepsilon_{it}\end{aligned}$$

La variable prédéterminée,  $\hat{i}_t$ , dépend de sa propre valeur retardée ainsi que de l’ensemble des chocs et les variables non-prédéterminées dépendent du même ensemble de variables.

---

<sup>16</sup>Le cas où la matrice  $\mathbf{A}$  n’est pas inversible peut être traité par le biais d’une décomposition de Shurr généralisée.

## 5 Les extensions du modèle

### 5.1 La persistance de la demande

- On peut facilement obtenir une courbe IS incorporant plus de persistance en supposant la présence de comportement de formation d'habitude ou d'imitation dans les comportement de consommation.

Supposons, plus précisément, que la fonction d'utilité instantannée de l'agent est de type :

$$u(C_t, t) = \frac{(C_t/C_t^*)^{1-1/\sigma}}{1-1/\sigma}$$

où  $C_t^*$  est donné par :  $C_t^* = (\bar{C}_t)^{1-\gamma} (\bar{C}_{t-1})^\gamma$ , la variable  $\bar{C}_t$  étant un niveau de consommation agrégé. Le terme  $C_t^*$  représente alors un niveau de référence sociale et traduit l'existence de comportement d'imitation et de rattrapage.

L'équation d'Euler linéarisée devient :

$$\hat{c}_t = \left( \frac{\Psi}{\Psi + \Gamma} \right) E_t \hat{c}_{t+1} + \left( \frac{\Gamma}{\Psi + \Gamma} \right) \hat{c}_{t-1} - \left( \frac{\sigma}{\Psi + \Gamma} \right) (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1})$$

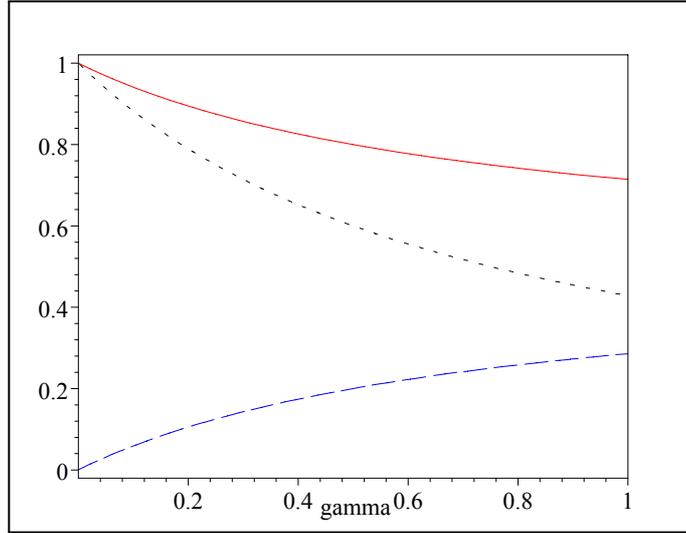
avec :

$$\begin{aligned}\Psi &= \sigma + \gamma(1 - \sigma) \\ \Gamma &= \gamma(1 - \sigma)\end{aligned}$$

et l'équation d'arbitrage consommation/loisir s'écrit alors :

$$\hat{\omega}_t = \frac{\hat{n}_t}{\sigma_n} + \Psi \frac{\hat{c}_t}{\sigma} - \Gamma \frac{\hat{c}_{t-1}}{\sigma}$$

Sur le graphique suivant, on a représenté les paramètres de l'équation d'Euler linéarisée en fonction de  $\gamma$ . Le terme  $\frac{\Psi}{\Psi + \Gamma}$  est représenté en traits continu,  $\frac{\Gamma}{\Psi + \Gamma}$  par des tirets et  $\frac{\sigma}{\Psi + \Gamma}$  en pointillés. L'élasticité intertemporelle de la consommation a été fixée à :  $\sigma = 0.6$ .



Comme on peut le vérifier, le cas  $\gamma = 0$ , correspondant au cas où le comportement de rattrapage ne joue pas, donne un résultat similaire à celui qui aurait été obtenu en l'absence de norme de consommation, mais dans le cas d'une utilité instantannée de la consommation logarithmique. L'effet "rattrapage" est maximal lorsque  $\gamma = 1$ .

## 5.2 La persistance de l'inflation

- Il est plus difficile de rendre compte de la persistance naturelle de l'inflation. Cela peut néanmoins être fait en supposant que les firmes qui ne révisent pas leurs prix de manière optimale les augmentent en appliquant le taux d'inflation de la période précédente plutôt que le taux de long terme. On obtient alors, dans le cas où les prix ne sont pas fixés à l'avance :

$$\hat{\pi}_t = \frac{\hat{\pi}_{t-1}}{1 + \beta} + \frac{\beta \hat{\pi}_{t+1} + \alpha \widehat{cm}_t}{1 + \beta}$$

avec :

$$\alpha = (1 - \phi\beta) \left( \frac{1 - \phi}{\phi} \right)$$

et où l'on rappelle que

$$\begin{aligned} \widehat{cm}_t &= \hat{\omega}_t - \hat{a}_t = \frac{\hat{n}_t}{\sigma_n} + \Psi \frac{\hat{c}_t}{\sigma} - \Gamma \frac{\hat{c}_{t-1}}{\sigma} - \hat{a}_t \\ &= \frac{\hat{y}_t}{\sigma_n} + \Psi \frac{\hat{c}_t}{\sigma} - \Gamma \frac{\hat{c}_{t-1}}{\sigma} - \left( 1 + \frac{1}{\sigma_n} \right) \hat{a}_t \end{aligned}$$

Lorsque les prix sont fixés une période à l'avance, la courbe de Phillips devient :

$$\hat{\pi}_t = \frac{\hat{\pi}_{t-1}}{1 + \beta} + \frac{\beta E_{t-1} \hat{\pi}_{t+1} + \alpha E_{t-1} \widehat{cm}_t}{1 + \beta}$$

### 5.3 Simulations

Le modèle complet s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= \hat{c}_t + \hat{g}_t \\ \hat{c}_t &= \left( \frac{\Psi}{\Psi + \Gamma} \right) E_t \hat{c}_{t+1} + \left( \frac{\Gamma}{\Psi + \Gamma} \right) \hat{c}_{t-1} - \left( \frac{\sigma}{\Psi + \Gamma} \right) (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) \\ \hat{\pi}_t &= \left( \frac{1}{1 + \zeta \beta} \right) E_{t-j} \left[ \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \zeta \hat{\pi}_{t-1} + \alpha \left( \frac{\hat{y}_t}{\sigma_n} + \Psi \frac{\hat{c}_t}{\sigma} - \Gamma \frac{\hat{c}_{t-1}}{\sigma} - \left( 1 + \frac{1}{\sigma_n} \right) \hat{a}_t \right) \right] \\ \hat{i}_t &= \delta \hat{i}_{t-1} + (1 - \delta) (\varphi_\pi \hat{\pi}_t + \varphi_y \hat{y}_t) \end{aligned}$$

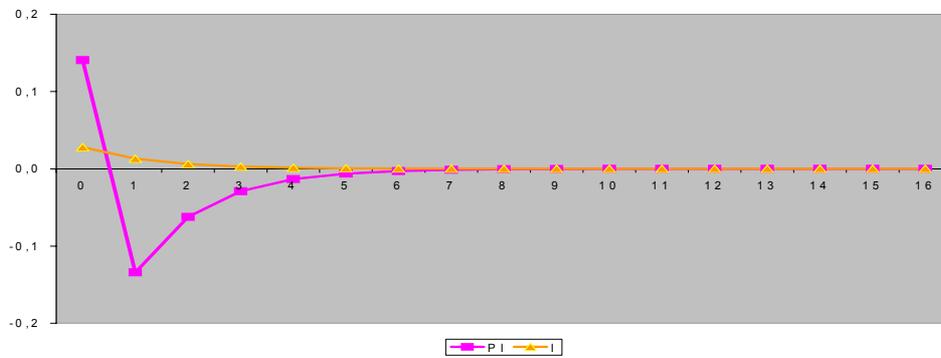
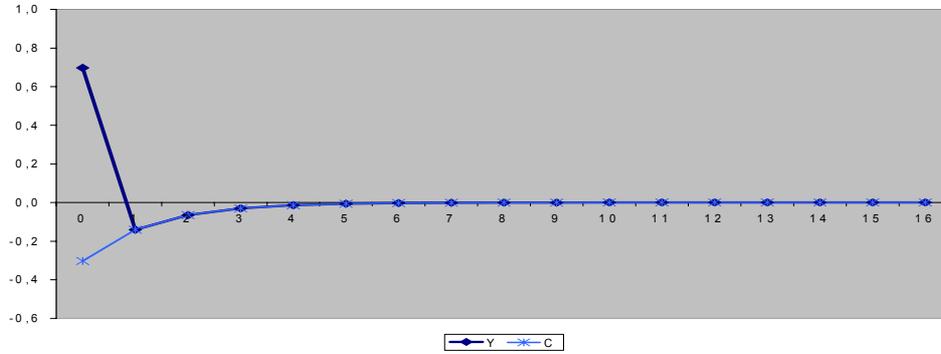
avec,  $j = 1$  si les prix sont fixés une période à l'avance et  $j = 0$  sinon et, suivant le cas :

	cas standard	persistence $\hat{c}$	persistence $\hat{\pi}$	cas général
$\Psi$	1	$\sigma + \gamma(1 - \sigma)$	1	$\sigma + \gamma(1 - \sigma)$
$\Gamma$	0	$\gamma(1 - \sigma)$	0	$\gamma(1 - \sigma)$
$\zeta$	0	0	1	1

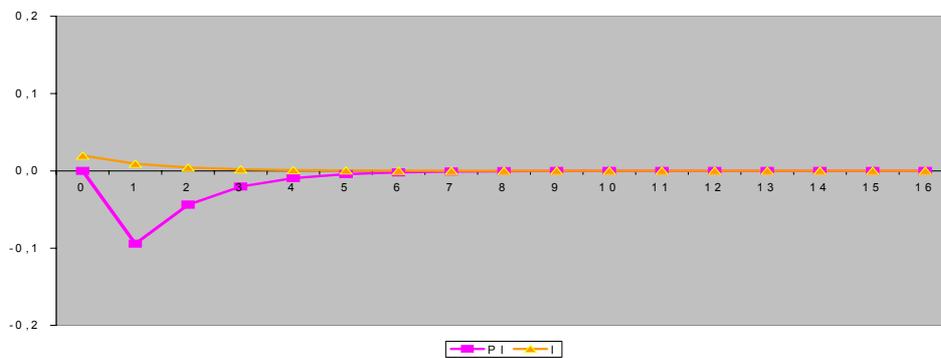
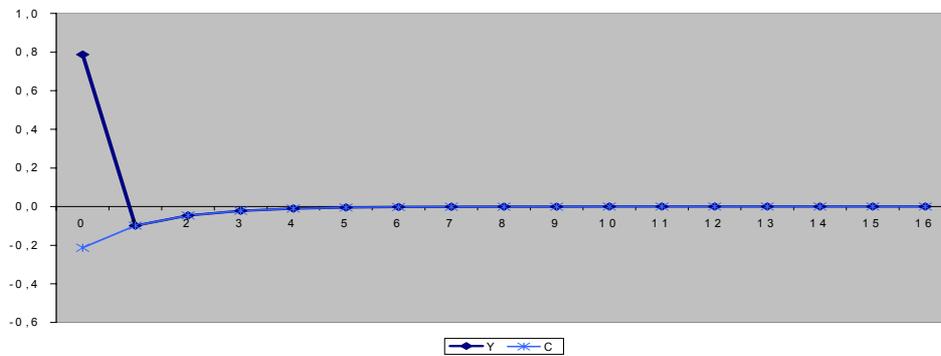
Dans les graphiques suivants, on a simulé l'effet d'un choc de dépenses publiques et l'effet d'un choc inflationniste. On a retenu les valeurs suivantes pour les paramètres fondamentaux :

$\sigma$	$\gamma$	$\beta$	$\sigma_n$	$\phi$	$\delta$	$\zeta$	$\varphi_\pi$	$\varphi_y$	$\rho_a$	$\rho_g$
0.6	0.01	0.99	0.2	0.75	0.95	0.01	1.5	0.5	0.8	0.8

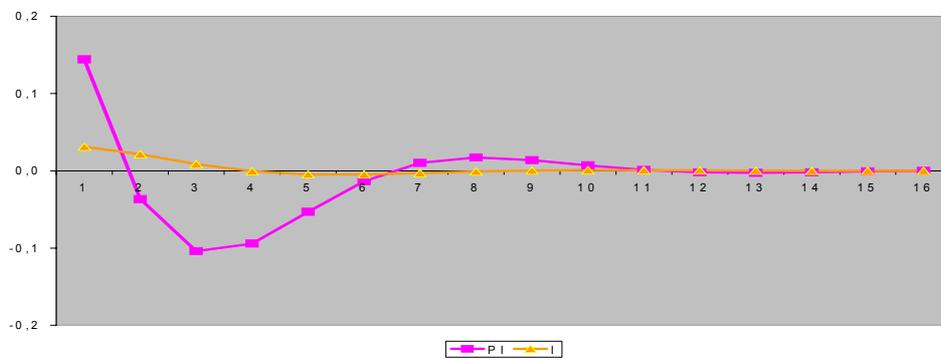
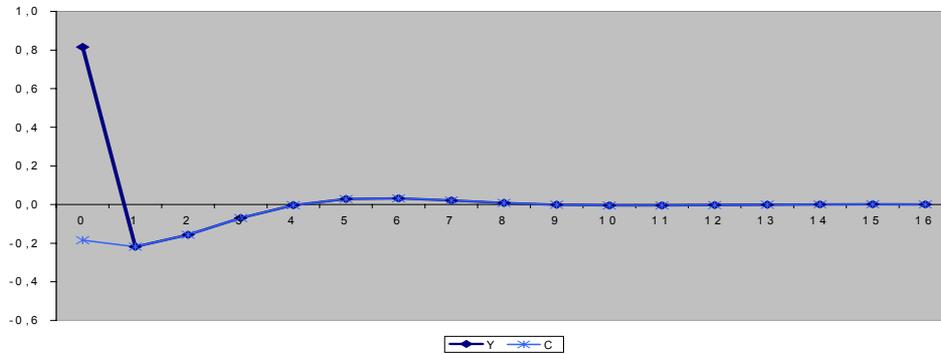
L'effet d'un choc de dépenses publique :  $\rho_g = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\zeta = 0$ .



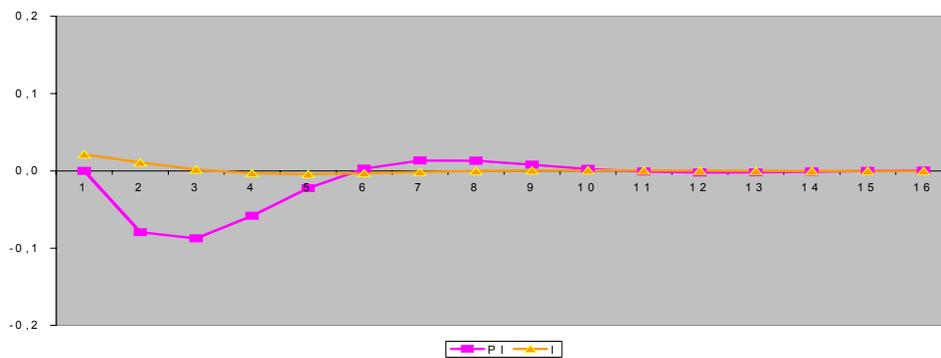
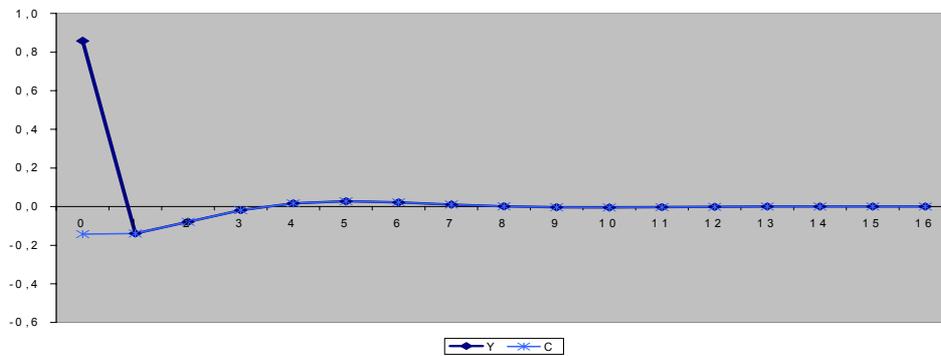
Le cas de prix fixés une période à l'avance



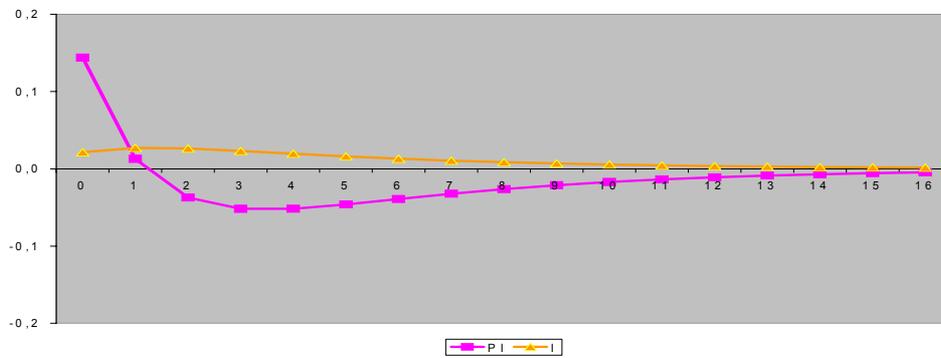
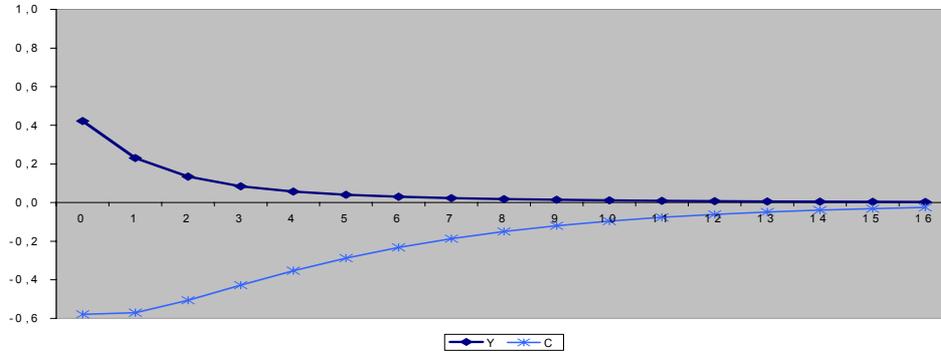
L'effet d'un choc de dépenses publique :  $\rho_g = 0$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\zeta = 1$ .



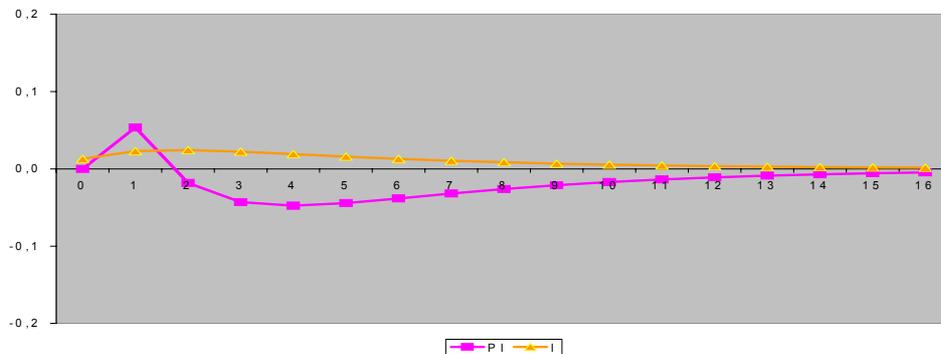
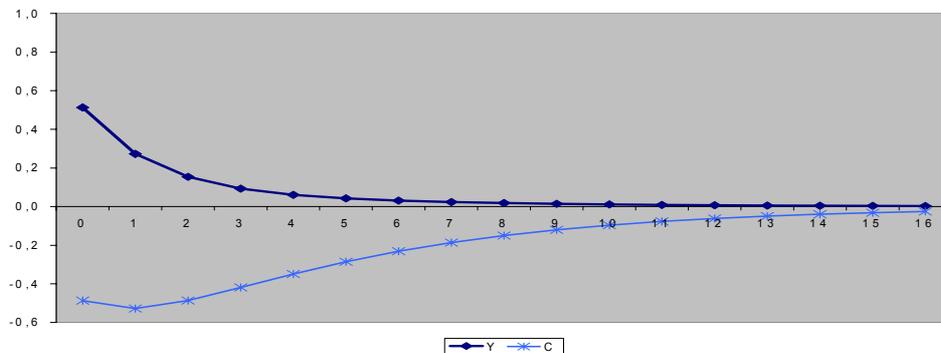
Le cas de prix fixés une période à l'avance



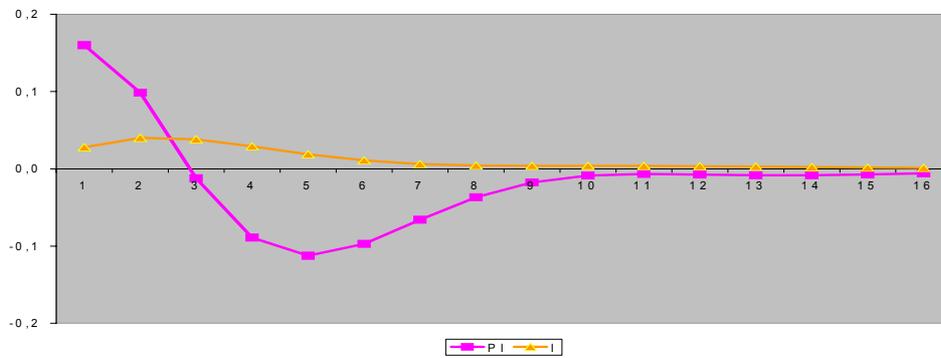
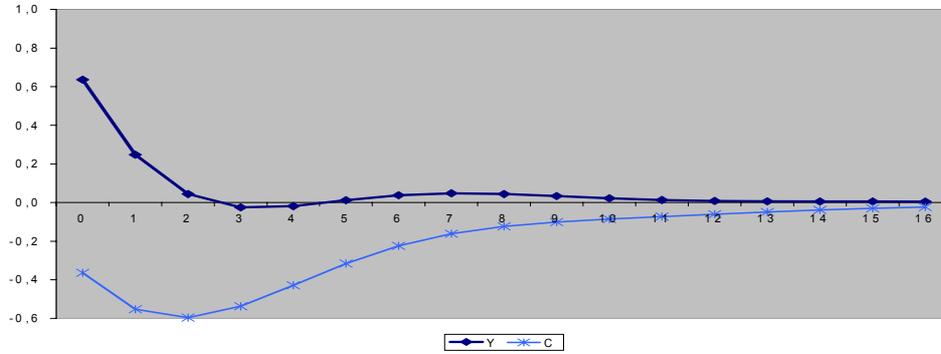
L'effet d'un choc de dépenses publique :  $\rho_g = 0.8$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\zeta = 0$ .



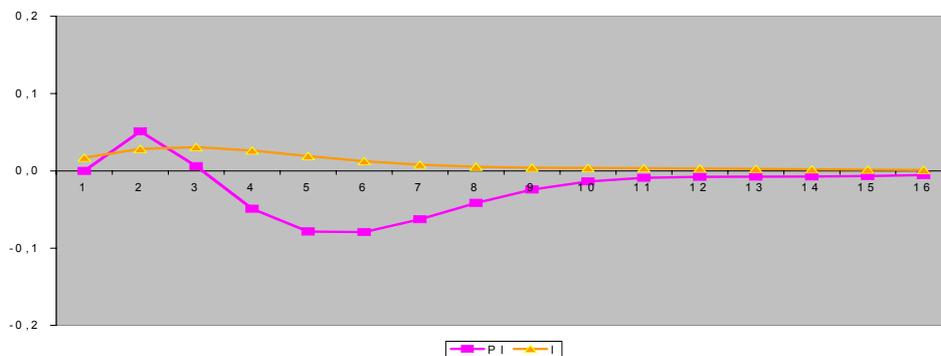
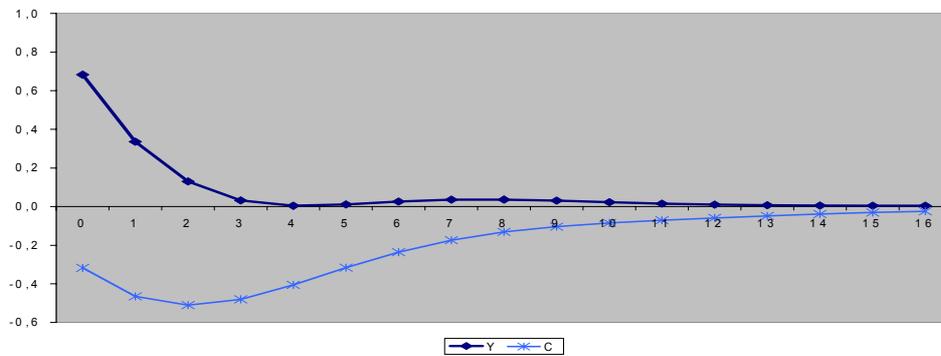
Le cas de prix fixés une période à l'avance



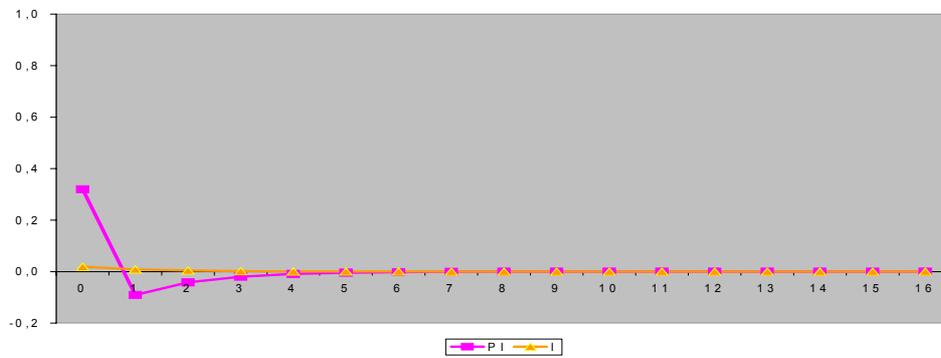
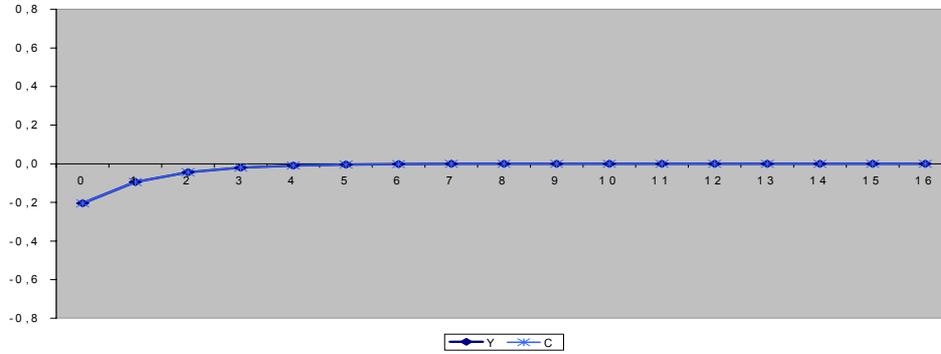
L'effet d'un choc de dépenses publique :  $\rho_g = 0.8$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\zeta = 1$ .



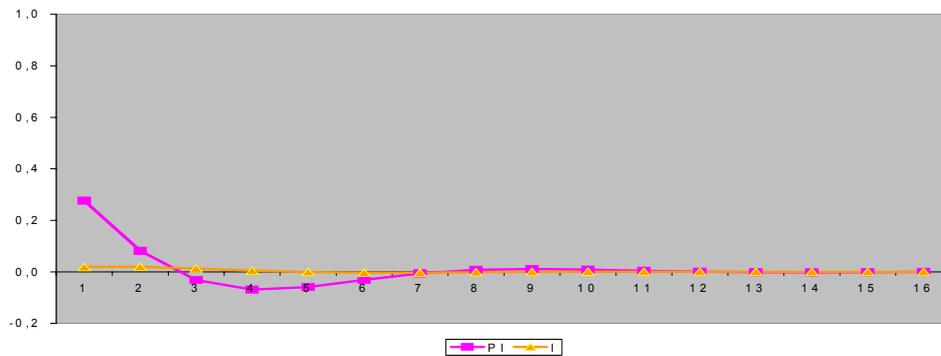
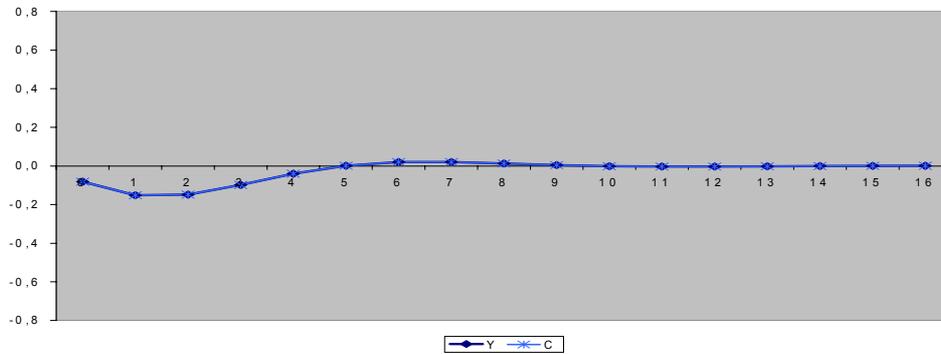
Le cas de prix fixés une période à l'avance



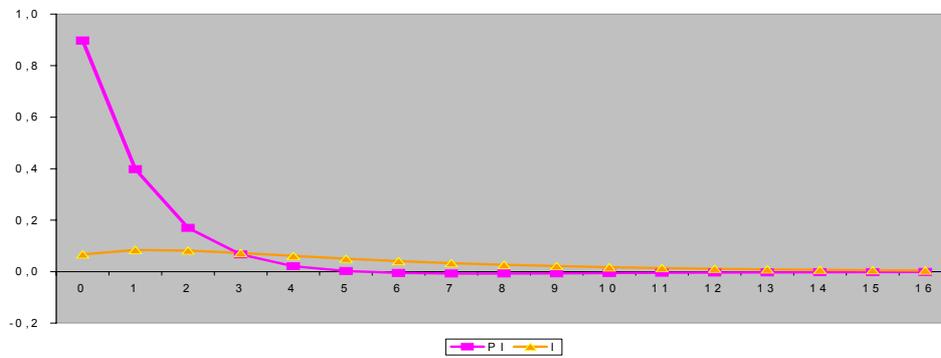
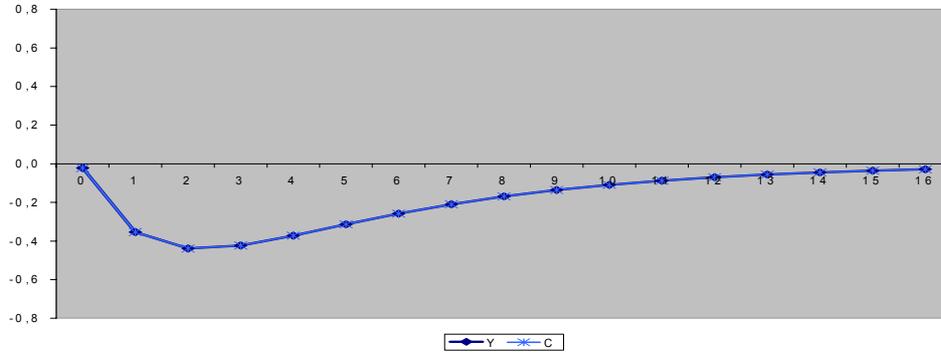
L'effet d'un choc inflationniste (choc de productivité négatif) :  $\rho_a = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\zeta = 0$ .



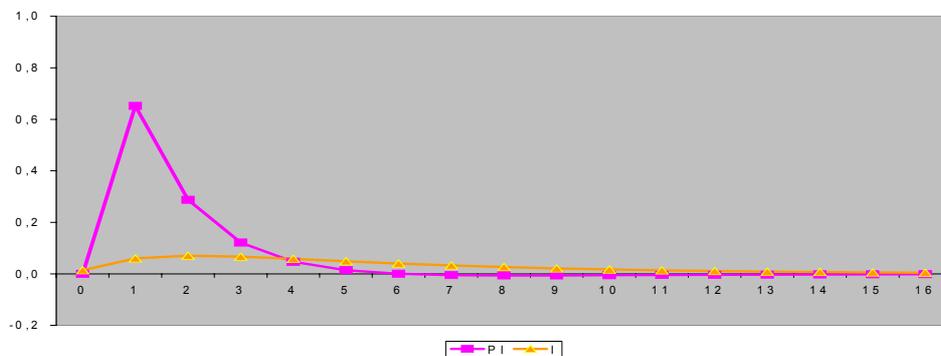
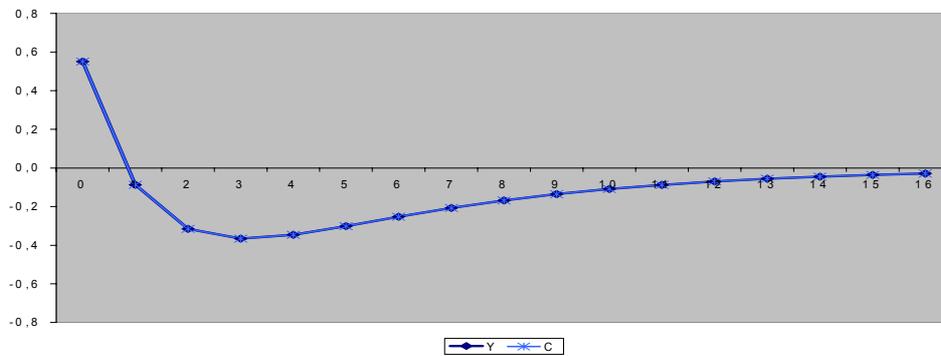
L'effet d'un choc inflationniste (choc de productivité négatif) :  $\rho_a = 0$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\zeta = 1$ .



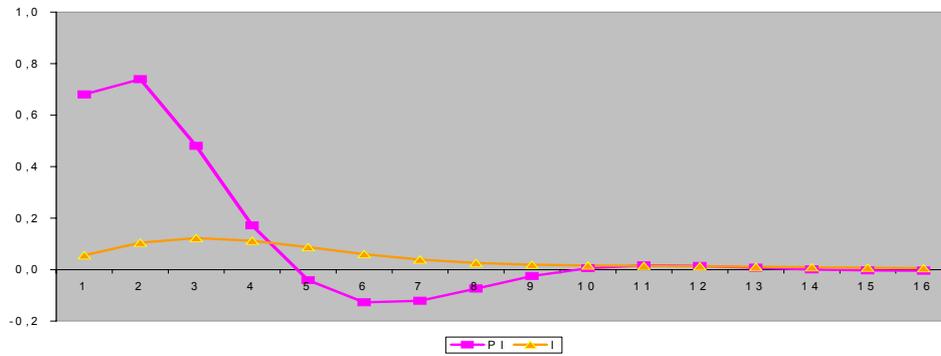
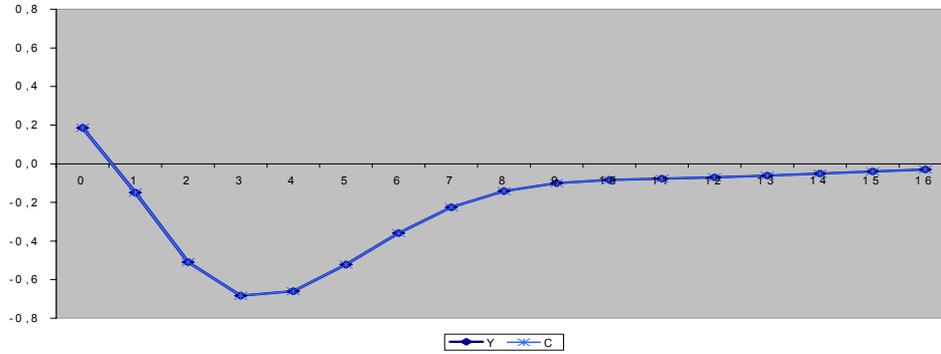
L'effet d'un choc inflationniste (choc de productivité négatif) :  $\rho_a = 0.8$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\zeta = 0$ .



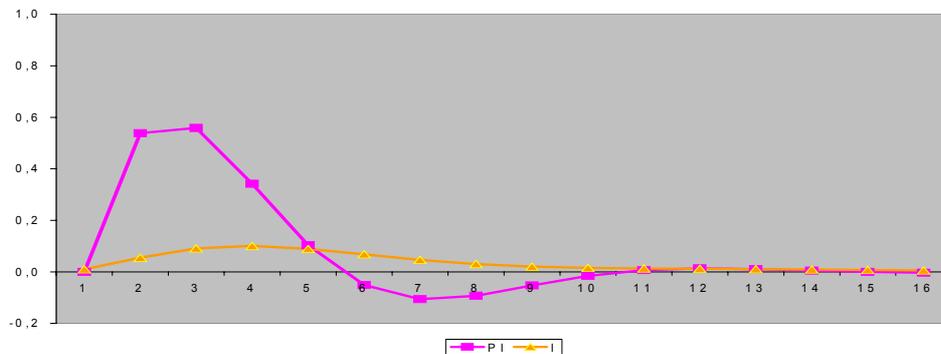
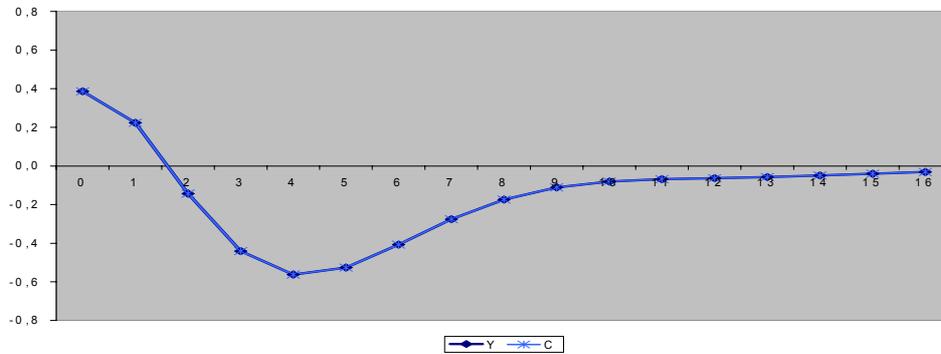
Le cas de prix fixés une période à l'avance



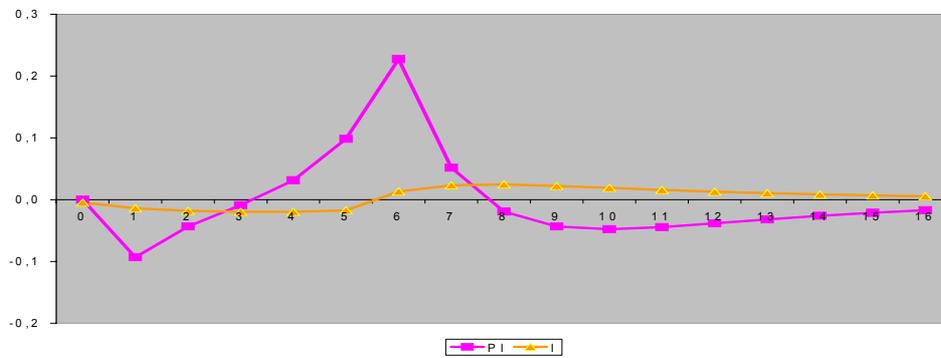
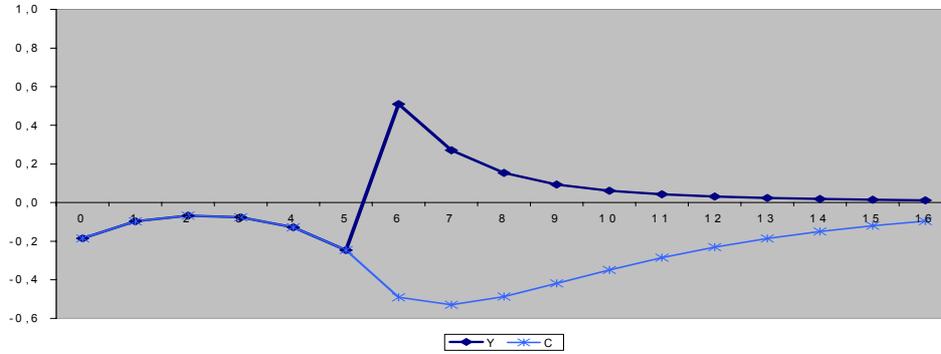
L'effet d'un choc inflationniste (choc de productivité négatif) :  $\rho_a = 0.8$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\zeta = 1$ .



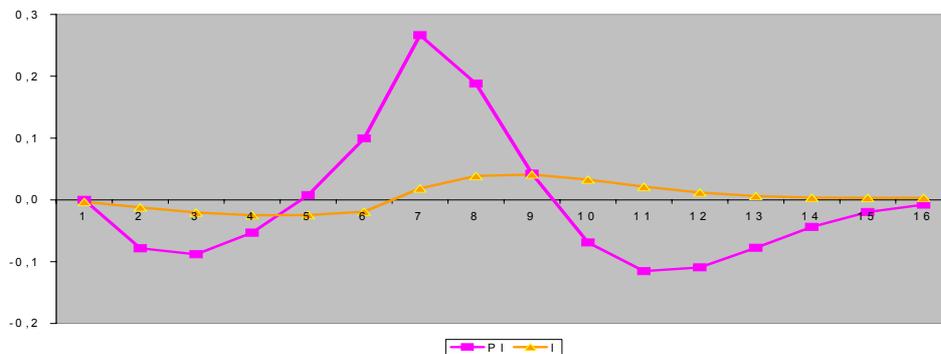
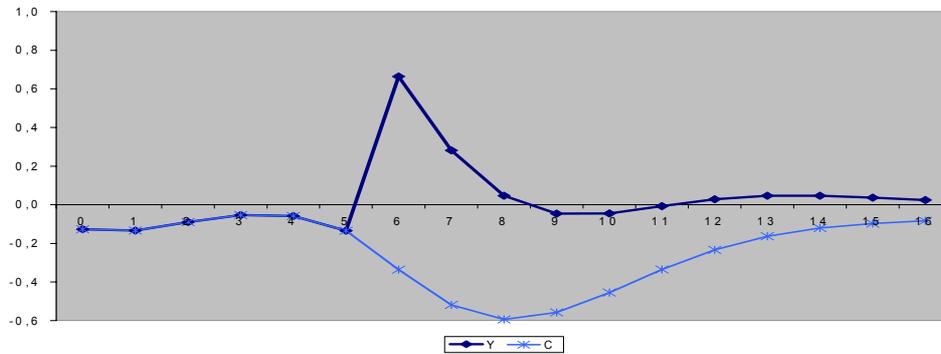
Le cas de prix fixés une période à l'avance



L'effet d'un choc de dépenses publique anticipé :  $\rho_g = 0.8$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\zeta = 0$ .



$\rho_g = 0.8$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\zeta = 1$ .



## Annexe

Nous partons de l'équation dynamique suivante :

$$E_t X_{t+1} = \mathbf{M} X_t + \mathbf{N} \epsilon_t \quad (\text{A1})$$

où  $E_t \epsilon_{t+i} = \mathbf{0} \forall i > 0$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  sont deux matrices  $n \times n$  et où le vecteur  $X_t$  a été ordonné de la manière suivante :

$$X_t = \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix}$$

où  $X_{1,t}$  est uniquement composé de variables non prédéterminées et  $X_{2,t}$ , de variables prédéterminées. L'ordre dans lequel les variables sont indiquées est conventionnel mais essentiel. Il faut toujours séparer les  $(n_1)$  variables non prédéterminées des  $(n_2)$  variables prédéterminées (avec  $n_1 + n_2 = n$ ).

La technique utilisée consiste ensuite à décomposer la matrice  $\mathbf{M}$  sous une forme vecteurs propres-valeurs propres<sup>17</sup> de manière à obtenir un système de variables transformées ayant chacune une dynamique autonome. Notons  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice des valeurs propres et  $\mathbf{Z}$ , celle des vecteurs propres associés, la matrice  $\mathbf{M}$  peut se réécrire :

$$\mathbf{M} = \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Z}^{-1} \quad (\text{A2})$$

avec :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{z}_n)$$

et où les valeurs propres (et les vecteurs propres associés) sont rangées par ordre décroissant en valeur absolue :  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ .

On rappelle que les valeurs propres  $\lambda$  sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(\mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0$$

et que chacun des vecteurs propres  $\mathbf{z}_i$  vérifie :

$$(\mathbf{M} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{z}_i = 0$$

En prémultipliant par  $\mathbf{Z}^{-1}$  l'équation (A1), où l'on a décomposé le vecteur  $X_t$ , il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{-1} E_t \begin{pmatrix} X_{1,t+1} \\ X_{2,t+1} \end{pmatrix} &= \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{M} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix} + \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{N} \epsilon_t \\ &= (\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Z}) \mathbf{Z}^{-1} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix} + \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{N} \epsilon_t \end{aligned}$$

---

<sup>17</sup>Lorsque cette décomposition n'est pas réalisable avec les techniques habituelles, parce que la matrice  $\mathbf{M}$  est singulière, il faut effectuer une décomposition de Jordan.

que l'on peut réécrire plus simplement, en définissant  $\tilde{X}_t = \mathbf{Z}^{-1}X_t$  le vecteur des variables transformées :

$$E_t \begin{pmatrix} \tilde{X}_{1,t+1} \\ \tilde{X}_{2,t+1} \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda} \begin{pmatrix} \tilde{X}_{1,t} \\ \tilde{X}_{2,t} \end{pmatrix} + \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{N}\epsilon_t \quad (\text{A3})$$

L'intérêt de cette reformulation du problème provient d'une caractéristique essentielle de  $\mathbf{\Lambda}$  : il s'agit d'une matrice diagonale. En d'autres termes, il est possible de réécrire la dynamique de chacune des composantes du vecteur  $\tilde{X}_t$  indépendamment de celle des autres. En décomposant respectivement  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{Z}^{-1}$  et  $\mathbf{N}$  sous la forme :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ (n_1 \times n_1) & (n_1 \times n_2) \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_2 \\ (n_2 \times n_1) & (n_2 \times n_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}^{11} & \mathbf{z}^{12} \\ (n_1 \times n_1) & (n_1 \times n_2) \\ \mathbf{z}^{21} & \mathbf{z}^{22} \\ (n_2 \times n_1) & (n_2 \times n_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ (n_1 \times n) \\ \mathbf{N}_2 \\ (n_2 \times n) \end{pmatrix},$$

l'équation (A3) peut également se réécrire sous la forme de deux systèmes indépendants : l'un composé des variables non prédéterminées et l'autre des variables prédéterminées. On obtient :

$$\begin{aligned} E_t \tilde{X}_{1,t+1} &= \mathbf{\Lambda}_1 \tilde{X}_{1,t} + (\mathbf{z}^{11}\mathbf{N}_1 + \mathbf{z}^{12}\mathbf{N}_2) \epsilon_t \\ E_t \tilde{X}_{2,t+1} &= \mathbf{\Lambda}_2 \tilde{X}_{2,t} + (\mathbf{z}^{21}\mathbf{N}_1 + \mathbf{z}^{22}\mathbf{N}_2) \epsilon_t \end{aligned}$$

Lorsque le nombre de valeurs propres de la matrice  $\mathbf{M}$  se situant à l'intérieur du cercle unité est égal au nombre de variables prédéterminées, *i.e.* lorsque les conditions de Blanchard & Kahn (1980) sont vérifiées, alors l'équilibre à anticipations rationnelles est unique. Dans ce cas, la seconde de ces deux équations peut se résoudre en arrière sans difficultés. La première doit, en revanche, être résolue en avant. Elle peut se réécrire :

$$\tilde{X}_{1,t} = \mathbf{\Lambda}_1^{-1} E_t \tilde{X}_{1,t+1} - \mathbf{\Lambda}_1^{-1} (\mathbf{z}^{11}\mathbf{N}_1 + \mathbf{z}^{12}\mathbf{N}_2) \epsilon_t$$

En notant que les valeurs propres de  $\mathbf{\Lambda}_1$  sont toutes supérieures à l'unité en module, la solution de cette première équation est simplement :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{1,t} &= - \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{\Lambda}_1^{-i-1} (\mathbf{z}^{11}\mathbf{N}_1 + \mathbf{z}^{12}\mathbf{N}_2) E_t \epsilon_{t+i} \\ &= -\mathbf{\Lambda}_1^{-1} (\mathbf{z}^{11}\mathbf{N}_1 + \mathbf{z}^{12}\mathbf{N}_2) \epsilon_t \end{aligned}$$

puisque  $E_t \epsilon_{t+i} = \mathbf{0} \forall i > 0$ . En développant  $\tilde{X}_t = \mathbf{Z}^{-1}X_t$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{1,t} &= \mathbf{z}^{11}X_{1,t} + \mathbf{z}^{12}X_{2,t} \\ \tilde{X}_{2,t} &= \mathbf{z}^{21}X_{1,t} + \mathbf{z}^{22}X_{2,t} \end{aligned}$$

on obtient facilement :

$$X_{1,t} = -(\mathbf{z}^{11})^{-1} \mathbf{z}^{12} X_{2,t} + (\mathbf{z}^{11})^{-1} \tilde{X}_{1,t}$$

ou, en utilisant le résultat précédent :

$$X_{1,t} = -(\mathbf{z}^{11})^{-1} \mathbf{z}^{12} X_{2,t} - (\mathbf{z}^{11})^{-1} \mathbf{\Lambda}_1^{-1} (\mathbf{z}^{11} \mathbf{N}_1 + \mathbf{z}^{12} \mathbf{N}_2) \epsilon_t \quad (\text{A4})$$

En remplaçant dans l'équation (A1) la matrice  $\mathbf{M}$  par son expression donnée dans (A2), il vient :

$$E_t X_{t+1} = \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Z}^{-1} X_t + \mathbf{N} \epsilon_t$$

expression que l'on peut développer sous la forme :

$$\begin{pmatrix} E_t X_{1,t+1} \\ E_t X_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^{11} & \mathbf{z}^{12} \\ \mathbf{z}^{21} & \mathbf{z}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \epsilon_t \\ \mathbf{N}_2 \epsilon_t \end{pmatrix}$$

où le premier terme à droite de l'égalité est la décomposition de la matrice  $\mathbf{Z}$  :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ (n_1 \times n_1) & (n_1 \times n_2) \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \\ (n_2 \times n_1) & (n_2 \times n_2) \end{pmatrix}$$

En développant la seconde ligne du système précédent, et en utilisant (A4), on obtient enfin :

$$E_t X_{2,t+1} = \mathbf{z}_{22} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{z}_{22}^{-1} X_{2,t} + \left[ \mathbf{N}_2 - \mathbf{M}_{21} (\mathbf{z}^{11})^{-1} \mathbf{\Lambda}_1^{-1} (\mathbf{z}^{11} \mathbf{N}_1 + \mathbf{z}^{12} \mathbf{N}_2) \right] \epsilon_t \quad (\text{A5})$$

où :

$$\mathbf{M}_{21} = (\mathbf{z}_{21} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{z}^{11} + \mathbf{z}_{22} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{z}^{21})$$

est également la partie supérieure droite de la matrice  $\mathbf{M}$  une fois sa partition effectuée et où on a utilisé une des propriétés des matrices partitionnées inverses, soit :

$$\mathbf{z}_{22}^{-1} = \mathbf{z}^{22} - \mathbf{z}^{21} (\mathbf{z}^{11})^{-1} \mathbf{z}^{12}$$

Les équations (A4) et (A5) constituent les solutions du problème (A1).

## Bibliographie

- BERNANKE B. & M. WOODFORD (1997) : "Inflation Forecast and Monetary Policy", *Journal of Money, Credit and Banking*, 29 (4), pp. 653-86.
- BLANCHARD O.J. & C.M. KAHN (1980) : "The solution of linear difference equations under rational expectations", *Econometrica* 48, pp. 1305-11.
- CALVO G. (1983) : "Staggered Prices in Maximizing Framework", *Journal of Monetary Economics*, 12, pp. 383-98.
- CLARIDA R., M. GERTLER & J. GALI (1998a) : "Monetary Policy Rules in Practice : Some International Evidence", *European Economic Review*, 42, pp. 1033-68.
- CLARIDA R., M. GERTLER & J. GALI (1998b) : "Monetary Policy Rules and Macroeconomic Stability : Evidence and Some Theory", *C.E.P.R. Discussion Paper*, n°1908.
- CLARIDA R., M. GERTLER & J. GALI (1999) : "The Science of Monetary Policy : A new Keynesian Perspective", *N.B.E.R. working paper* n°7147.
- ESTRELLA A. & J. FUHRER (1998) : "Dynamic Inconsistencies : Conterfactual Implication of a Class of Rational Expectations Models", *Federal Reserve Bank of NewYork working paper*.
- GERTLER M. & J. GALI (1999) : "Inflation Dynamic : A Structural Econometric Analysis", *Journal of Monetary Economics*, 44, pp. 195-222.
- JEANNE O. : "Generating real persistent effect of monetary shocks : how much nominal rigidity do we really need ?", *European Economic Review*, 42, pp. 1009-32.
- KERR W. & R. KING (1996) : "Limits on Interest Rate Rules in the IS Model", *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, 82 (2), pp. 47-75.
- KING R. & A. WOLMAN (1996) : "Inflation Targeting in a St. Louis Model of the 21st Century", *NBER working paper* n° 5507.
- KING R. & A. WOLMAN (1998) : "What Should the Monetary Authority Do When Prices Are Sticky ?", in *Monetary Policy Rules*, John B. Taylor (Ed).
- MCCALLUM B. & E. NELSON (1997) : "An Optimizing IS-LM Specification for Monetary Policy and Business Cycle Analysis", *NBER working paper* n° 5875.
- ROBERTS J. (1995) : "New Keynesian Economics and the Phillips Curve", *Journal of Money, Credit and Banking*, 27 (4), pp. 975-84.
- SODERLIND P. (1999) : "Solution and estimation of RE macromodels with optimal policy", *European Economic Review*, 43, pp. 813-823.
- TAYLOR, J.(1993) : "Discretion versus Policy Rule in Practice", *Carnegie-Rochester Series on Public Policy*, 39, pp. 195-214.
- TAYLOR, J.(1999) : "The robustness and efficiency of monetary policy rule as guidelines for interest rate setting by the European central bank", *Journal of Monetary Economics*, 43, pp. 655-79.

WOODFORD M. (1996) : “Control of The Public Debt : a Requirement for Price Stability” - *N.B.E.R. Working Paper*, n°5684.

WOODFORD M. (1999) : “Optimal Monetary Policy Inertia”, *mimeo*, Princeton University.

WOODFORD M. & ROTEMBERG (1997) : “An Optimization-Based Econometric Framework for the Evaluation of Monetary Policy”, *N.B.E.R. Macroeconomics Annual*, pp. 297-346.

WOODFORD M. & ROTEMBERG (1998) : “Interest-Rate Rule in an Estimated Sticky Price Model”, *N.B.E.R. Working Paper*, n°6618.

YUN T. (1996) : “Nominal Price Rigidity, Money Supply Endogeneity, and Business Cycles”, *Journal of Monetary Economics*, 37, pp. 345-370.

# Documents de recherche EPEE

## 2002

- 02 - 01 **Inflation, salaires et SMIC: quelles relations?**  
*Yannick L'HORTY & Christophe RAULT*
- 02 - 02 **Le paradoxe de la productivité**  
*Nathalie GREENAN & Yannick L'HORTY*
- 02 - 03 **35 heures et inégalités**  
*Fabrice GILLES & Yannick L'HORTY*
- 02 - 04 **Droits connexes, transferts sociaux locaux et retour à l'emploi**  
*Denis ANNE & Yannick L'HORTY*
- 02 - 05 **Animal Spirits with Arbitrarily Small Market Imperfection**  
*Stefano BOSI, Frédéric DUFOURT & Francesco MAGRIS*
- 02 - 06 **Actualité du protectionnisme :  
l'exemple des importations américaines d'acier**  
*Anne HANAUT*

## 2001

- 01 - 01 **Optimal Privatisation Design and Financial Markets**  
*Stefano BOSI, Guillaume GIRMENS & Michel GUILLARD*
- 01 - 02 **Valeurs extrêmes et series temporelles :  
application à la finance**  
*Sanvi AVOUYI-DOVI & Dominique GUEGAN*
- 01 - 03 **La convergence structurelle européenne :  
rattrapage technologique et commerce intra-branche**  
*Anne HANAUT & El Mouhoub MOUHOUD*
- 01 - 04 **Incitations et transitions sur le marché du travail :  
une analyse des stratégies d'acceptation et des refus d'emploi**  
*Thierry LAURENT, Yannick L'HORTY, Patrick MAILLE & Jean-François OUVARD*
- 01 - 05 **La nouvelle économie et le paradoxe de la productivité :  
une comparaison France - Etats-Unis**  
*Fabrice GILLES & Yannick L'HORTY*
- 01 - 06 **Time Consistency and Dynamic Democracy**  
*Toke AIDT & Francesco MAGRIS*
- 01 - 07 **Macroeconomic Dynamics**  
*Stefano BOSI*
- 01 - 08 **Règles de politique monétaire en présence d'incertitude :  
une synthèse**  
*Hervé LE BIHAN & Jean-Guillaume SAHUC*
- 01 - 09 **Indeterminacy and Endogenous Fluctuations  
with Arbitrarily Small Liquidity Constraint**  
*Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 01 - 10 **Financial Effects of Privatizing the Production of Investment Goods**  
*Stefano BOSI & Carine NOURRY*

- 01 - 11      **On the Woodford Reinterpretation of the Reichlin OLG Model :  
a Reconsideration**  
*Guido CAZZAVILLAN & Francesco MAGRIS*
- 01 - 12      **Mathematics for Economics**  
*Stefano BOSI*
- 01 - 13      **Real Business Cycles and the Animal Spirits Hypothesis  
in a Cash-in-Advance Economy**  
*Jean-Paul BARINCI & Arnaud CHERON*
- 01 - 14      **Privatization, International Asset Trade and Financial Markets**  
*Guillaume GIRMENS*
- 01 - 15      **Externalités liées dans leur réduction et recyclage**  
*Carole CHEVALLIER & Jean DE BEIR*
- 01 - 16      **Attitude towards Information and Non-Expected Utility Preferences :  
a Characterization by Choice Functions**  
*Marc-Arthur DIAYE & Jean-Max KOSKIEVIC*
- 01 - 17      **Fiscalité de l'épargne en Europe :  
une comparaison multi-produits**  
*Thierry LAURENT & Yannick L'HORTY*
- 01 - 18      **Why is French Equilibrium Unemployment so High :  
an Estimation of the WS-PS Model**  
*Yannick L'HORTY & Christophe RAULT*
- 01 - 19      **La critique du « système agricole » par Smith**  
*Daniel DIATKINE*
- 01 - 20      **Modèle à Anticipations Rationnelles  
de la CONjoncture Simulée : MARCOS**  
*Pascal JACQUINOT & Ferhat MIHOUBI*
- 01 - 21      **Qu'a-t-on appris sur le lien salaire-emploi ?  
De l'équilibre de sous emploi au chômage d'équilibre :  
la recherche des fondements microéconomiques  
de la rigidité des salaires**  
*Thierry LAURENT & Hélène ZAJDELA*
- 01 - 22      **Formation des salaires, ajustements de l'emploi  
et politique économique**  
*Thierry LAURENT*

## 2000

- 00 - 01      **Wealth Distribution and the Big Push**  
*Zoubir BENHAMOUCHE*
- 00 - 02      **Conspicuous Consumption**  
*Stefano BOSI*
- 00 - 03      **Cible d'inflation ou de niveau de prix :  
quelle option retenir pour la banque centrale  
dans un environnement « nouveau keynésien » ?**  
*Ludovic AUBERT*
- 00 - 04      **Soutien aux bas revenus, réforme du RMI et incitations à l'emploi :  
une mise en perspective**  
*Thierry LAURENT & Yannick L'HORTY*
- 00 - 05      **Growth and Inflation in a Monetary « Selling-Cost » Model**

*Stefano BOSI & Michel GUILLARD*

- 00 - 06 **Monetary Union : a Welfare Based Approach**  
*Martine CARRE & Fabrice COLLARD*
- 00 - 07 **Nouvelle synthèse et politique monétaire**  
*Michel GUILLARD*
- 00 - 08 **Neoclassical Convergence versus Technological Catch-Up :  
a Contribution for Reaching a Consensus**  
*Alain DESDOIGTS*
- 00 - 09 **L'impact des signaux de politique monétaire sur la volatilité  
intra-journalière du taux de change deutschemark - dollar**  
*Aurélié BOUBEL, Sébastien LAURENT & Christelle LECOURT*
- 00 - 10 **A Note on Growth Cycles**  
*Stefano BOSI, Matthieu CAILLAT & Matthieu LEPELLEY*
- 00 - 11 **Growth Cycles**  
*Stefano BOSI*
- 00 - 12 **Règles monétaires et prévisions d'inflation en économie ouverte**  
*Michel BOUTILLIER, Michel GUILLARD & Auguste MPACKO PRISO*
- 00 - 13 **Long-Run Volatility Dependencies in Intraday Data  
and Mixture of Normal Distributions**  
*Aurélié BOUBEL & Sébastien LAURENT*

## 1999

- 99 - 01 **Liquidity Constraint, Increasing Returns and Endogenous Fluctuations**  
*Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 99 - 02 **Le temps partiel dans la perspective des 35 heures**  
*Yannick L'HORTY & Bénédicte GALTIER*
- 99 - 03 **Les causes du chômage en France :  
Une ré-estimation du modèle WS - PS**  
*Yannick L'HORTY & Christophe RAULT*
- 99 - 04 **Transaction Costs and Fluctuations in Endogenous Growth**  
*Stefano BOSI*
- 99 - 05 **La monnaie dans les modèles de choix intertemporels :  
quelques résultats d'équivalences fonctionnelles**  
*Michel GUILLARD*
- 99 - 06 **Cash-in-Advance, Capital, and Indeterminacy**  
*Gaetano BLOISE, Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 99 - 07 **Sunspots, Money and Capital**  
*Gaetano BLOISE, Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 99 - 08 **Inter-Jurisdictional Tax Competition in a Federal System  
of Overlapping Revenue Maximizing Governments**  
*Laurent FLOCHEL & Thierry MADIES*
- 99 - 09 **Economic Integration and Long-Run Persistence  
of the GNP Distribution**  
*Jérôme GLACHANT & Charles VELLUTINI*
- 99 - 10 **Macroéconomie approfondie : croissance endogène**  
*Jérôme GLACHANT*

- 99 - 11      **Growth, Inflation and Indeterminacy in  
a Monetary « Selling-Cost » Model**  
*Stefano BOSI & Michel GUILLARD*
- 99 - 12      **Règles monétaires, « ciblage » des prévisions  
et (in)stabilité de l'équilibre macroéconomique**  
*Michel GUILLARD*
- 99 - 13      **Educating Children :  
a Look at Household Behaviour in Côte d'Ivoire**  
*Philippe DE VREYER, Sylvie LAMBERT & Thierry MAGNAC*
- 99 - 14      **The Permanent Effects of Labour Market Entry  
in Times of High Aggregate Unemployment**  
*Philippe DE VREYER, Richard LAYTE, Azhar HUSSAIN & Maarten WOLBERS*
- 99 - 15      **Allocating and Funding Universal Service Obligations  
in a Competitive Network Market**  
*Philippe CHONE, Laurent FLOCHEL & Anne PERROT*
- 99 - 16      **Intégration économique et convergence  
des revenus dans le modèle néo-classique**  
*Jérôme GLACHANT & Charles VELLUTINI*
- 99 - 17      **Convergence des productivités européennes :  
réconcilier deux approches de la convergence**  
*Stéphane ADJEMIAN*
- 99 - 18      **Endogenous Business Cycles :  
Capital-Labor Substitution and Liquidity Constraint**  
*Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 99 - 19      **Structure productive et procyclicité de la productivité**  
*Zoubir BENHAMOUCHE*
- 99 - 20      **Intraday Exchange Rate Dynamics and Monetary Policy**  
*Aurélie BOUBEL & Richard TOPOL*

## 1998

- 98 - 01      **Croissance, inflation et bulles**  
*Michel GUILLARD*
- 98 - 02      **Patterns of Economic Development and the Formation of Clubs**  
*Alain DESDOIGTS*
- 98 - 03      **Is There Enough RD Spending ?  
A Reexamination of Romer's (1990) Model**  
*Jérôme GLACHANT*
- 98 - 04      **Spécialisation internationale et intégration régionale.  
L'Argentine et le Mercosur**  
*Carlos WINOGRAD*
- 98 - 05      **Emploi, salaire et coordination des activités**  
*Thierry LAURENT & Hélène ZAJDELA*
- 98 - 06      **Interconnexion de réseaux et charge d'accès :  
une analyse stratégique**  
*Laurent FLOCHEL*
- 98 - 07      **Coût unitaires et estimation d'un système de demande de travail :  
théorie et application au cas de Taiwan**  
*Philippe DE VREYER*

- 98 - 08      **Private Information :**  
**an Argument for a Fixed Exchange Rate System**  
*Ludovic AUBERT & Daniel LASKAR*
- 98 - 09      **Le chômage d'équilibre. De quoi parlons nous ?**  
*Yannick L'HORTY & Florence THIBAUT*
- 98 - 10      **Deux études sur le RMI**  
*Yannick L'HORTY & Antoine PARENT*
- 98 - 11      **Substituabilité des hommes aux heures et ralentissement de la productivité ?**  
*Yannick L'HORTY & Christophe RAULT*
- 98 - 12      **De l'équilibre de sous emploi au chômage d'équilibre :**  
**la recherche des fondements microéconomiques de la rigidité des salaires**  
*Thierry LAURENT & Hélène ZAJDELA*