



## **DOCUMENT DE RECHERCHE**

**EPEE**

**CENTRE D'ETUDE DES POLITIQUES ECONOMIQUES DE L'UNIVERSITÉ D'EVRY**

---

**Valeurs extrêmes et series temporelles :  
application à la finance**

***Sanvi AVOUYI-DOVI & Dominique GUEGAN***

**01 – 02**

# Valeurs extrêmes et séries temporelles : Applications à la finance

Sanvi Avouyi-Dovi <sup>1</sup>, Dominique Guégan <sup>2</sup>

15 mars 2001

<sup>1</sup>Centre de Recherche, Banque de France et EPEE, Université d'Évry Val d'Essonne - [sanvi.avouyi-dovi@banque-france.fr](mailto:sanvi.avouyi-dovi@banque-france.fr)

<sup>2</sup>Professeur, Université de Reims et CEPN, CNRS-UMR 2148, Université Paris XIII - [dominique.guegan@univ-reims.fr](mailto:dominique.guegan@univ-reims.fr).

Les auteurs remercient Sandrine Brunot (CDC-IXIS Capital Markets) et Sophie Ladoucette (Centre de recherche, Banque de France et Université de Reims) pour leur aide. Les erreurs ou omissions relèvent, bien entendu, de la seule responsabilité des auteurs.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Distribution des maxima pour des suites de variables aléatoires</b>	<b>7</b>
1.1	Lois des maxima pour des suites indépendantes . . . . .	9
1.2	Les extrêmes des suites de variables aléatoires dépendantes . .	16
<b>2</b>	<b>Distribution des extrêmes pour des processus généraux</b>	<b>21</b>
2.1	Notion d'index extrême . . . . .	22
2.2	Les processus linéaires . . . . .	23
2.3	Les processus non linéaires . . . . .	25
2.3.1	Processus bilinéaires. . . . .	25
2.3.2	Processus hétéroscédastiques. . . . .	26
2.3.3	Les processus $AR - ARCH$ . . . . .	29
2.3.4	Les processus à volatilité stochastique ( $SV$ ). . . . .	34
<b>3</b>	<b>Procédures d'estimation des paramètres des lois extrêmes</b>	<b>37</b>
3.1	Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	37
3.2	L'estimateur de Pickands . . . . .	38
3.3	Estimateur de Hill . . . . .	39
3.4	Approche au second ordre . . . . .	40
3.5	Estimation de l'index extrême . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Valeurs extrêmes et processus multivariés</b>	<b>41</b>
4.1	Définitions et propriétés générales . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Etude empirique</b>	<b>46</b>
5.1	Simulations des densités des lois limites standard . . . . .	46
5.2	Etude empirique des extrêmes de processus linéaires et non linéaires . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>71</b>

# Introduction

Un des problèmes fondamentaux rencontré en finance concerne la nécessité de mettre en place une évaluation journalière du risque. Le calcul des risques est aujourd'hui largement utilisé en finance internationale. Il s'agit par exemple d'éviter les faillites retentissantes et donc d'être capable de prévoir l'occurrence des crises et, si possible, leur intensité. Il est nécessaire d'être en mesure d'évaluer les possibilités d'apparition des événements rares. Il peut aussi s'agir pour l'investisseur d'estimer le profit le plus élevé possible dans un environnement risqué. Dans le cas des indices boursiers par exemple, l'investisseur peut se servir du caractère volatil de ces marchés pour intégrer dans son portefeuille les valeurs susceptibles de monter très haut tout en se prémunissant contre celles qui peuvent chuter fortement à un horizon donné.

Quoiqu'il en soit la maîtrise des risques est la base du travail du gestionnaire. Plus que jamais, elle est d'actualité. Dans ce contexte, il convient de préciser ce que l'on entend par risque. On peut assimiler la notion de risque à la probabilité de réalisation d'un événement rare (ou imprévu). C'est l'objet de la théorie des valeurs extrêmes (Leadbetter, Lindgren et Rootzèn, 1983), développée en probabilité et ayant d'innombrables applications dans divers domaines.

On peut citer comme exemple :

- la finance où l'hypothèse de gaussianité, incompatible avec les observations surtout en hautes fréquences, est de plus en plus fortement remise en cause ;
- l'assurance dont l'une des préoccupations est la prise en compte des grands sinistres ;
- l'hydrologie, domaine dans lequel la prévision des crues par exemple est particulièrement importante ;
- la météorologie où l'étude de la vitesse du vent permet d'évaluer le degré de résistance des matériaux face à la pression exercée par le vent (au cours d'une tempête par exemple) sur les bâtiments ou les structures de génie civil ;
- enfin, la macro-économie réelle dans le but de prévoir les crises économiques.

Prévoir certains événements ou comportements, à partir d'une étude des valeurs extrêmes d'une série, est donc un des principaux objectifs pour ceux qui tentent d'appliquer la théorie de ces valeurs.

Signalons que plusieurs approches sont possibles en théorie des valeurs extrêmes. Nous nous intéressons ici à l'étude des fonctions de distribution (en

particulier la fonction de répartition) dans la lignée des travaux de Lamperti (1964), Resnick et Rabinovitch (1973) ou encore Weissman (1975). La théorie probabiliste traditionnelle des valeurs extrêmes d'une série concerne la distribution asymptotique des maxima ou des minima d'une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a. i.i.d.). L'étude de ce problème remonte à l'antiquité (dès l'apparition des catastrophes) même si les résultats récents sont essentiellement fondés sur les avancées théoriques des cinquante dernières années. On s'est d'abord intéressé à l'étude des sommes de v.a. i.i.d. pour passer ensuite à celle des maxima et des minima. En effet, comme on le verra plus loin, le passage de l'étude des sommes à celle des maxima de v.a. i.i.d. est relativement facile et commode.

Conscient des limites de l'approche traditionnelle, induite notamment par l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires, des extensions à la théorie initiale ont rapidement vu le jour. C'est ainsi que l'hypothèse d'indépendance a été remplacée par une forme particulière de dépendance puis par l'étude des processus stationnaires à temps discret et continu. La remise en cause de l'hypothèse d'indépendance est une exigence incontournable dans l'optique des applications. En finance ou en météorologie par exemple, l'hypothèse d'indépendance est souvent mise en défaut. Une présentation unifiée d'une théorie englobant les différentes recherches en cours, l'un des axes importants de cette étude, devrait permettre de mieux cerner les conditions d'une utilisation "optimale" de la théorie des valeurs extrêmes.

La distribution des extrêmes pour une suite de v.a. i.i.d. a été développée à partir d'une normalisation que nous précisons plus loin. Cette approche permet de se retrouver dans le contexte de l'application du théorème central limite. Les premiers travaux ont permis d'obtenir des inégalités sur la distribution des extrêmes. Celles-ci déterminent les bornes de la distribution des extrêmes d'un nombre fini de points. Fréchet (1927), Jordan (1927) et Takács (1958) sont les pionniers dans ce domaine mais on doit les principales inégalités obtenues sur la distribution des maxima ou du minima à Chung et Erdos (1952), Whittle (1959), Rényi (1958, 1961), Kounias (1968), Galambos (1966, 1975). Enfin, c'est David (1981) qui a évalué les premières statistiques d'ordre.

Le résultat central de la théorie des valeurs extrêmes concerne la distribution asymptotique  $G_\alpha$  du maximum  $M_n$  d'une série ( $M_n = (X_1, \dots, X_n)$ , où  $X_1, \dots, X_n$  est une suite de v.a. i.i.d de loi  $F$ ). Dans la suite du texte, par loi, on entend la fonction de répartition et non la fonction de densité. Le résultat obtenu dans le cas général revient à Fisher et Tippett (1928). La

preuve complète a été proposée par Gnedenko (1943). Par définition, lorsque  $G_\alpha$  est identifiée sous des conditions qui seront précisées plus loin, on dit que la distribution  $F$  des  $X$  appartient au domaine d'attraction (pour les maxima ou les minima) de  $G_\alpha$ ,  $F \in D(G_\alpha)$ . Un problème important revient à définir les conditions (nécessaires et suffisantes) d'appartenance d'une distribution à un domaine d'attraction. Parallèlement aux études citées, d'autres travaux ont été développés sur le même sujet. Il s'agit des travaux de Bortkiewicz (1922), Von Mises (1923), Dodd (1923) et Tippett (1925). Toutefois, c'est à partir des travaux de Gnedenko (1943), Mejsler (1949), Gumbel (1958) et de Haan (1970) que la théorie s'est précisée et a pris son véritable envol.

Par ailleurs, d'autres types de résultats concernant l'étude du comportement des valeurs d'une série dont la valeur est supérieure à un seuil donné  $u_n$  ont vu le jour. Ceci a permis d'obtenir la distribution limite des  $k$ -points extrêmes d'une série pour un  $k$  fixé. Dans ce cas, lorsque les échantillons sont indépendants, les vitesses de convergence sont connues (Smirnov, 1952, Kawata, 1951, Rényi, 1953, Goeffroy, 1965, Rossberg, 1965, Ikeda et Matsunawa, 1970, de Hann et Hordijk, 1972 ou Watts, 1977 dans le cas des statistiques de rang). D'une manière plus générale, à la suite des travaux de Haldane et Jayakar (1963), Hall (1979, 1980 et 1996) a étudié, pour le cas des échantillons indépendants, les vitesses de convergence des valeurs extrêmes. Il a, en outre, proposé une évaluation de la probabilité pour que ces valeurs extrêmes dépassent un seuil donné. Notons au passage que dans la littérature statistique, on définit les comportements extrêmes en termes de dépassement de seuil. Les notions probabilistes et statistiques de valeurs extrêmes se rejoignent, bien évidemment. L'analyse des vitesses de convergence a fait aussi l'objet d'applications concrètes. Rachev (1993) par exemple a étudié la vitesse de convergence des maxima dans le cas des rendements des actions.

En outre, divers travaux ont été consacrés à l'estimation des paramètres des distributions asymptotiques des valeurs extrêmes. Partant des méthodes d'estimation empirique, valable uniquement dans le cas univarié (Gumbel et Mustafi, 1967 ou Tiago de Oliveira, 1975 par exemple), on a fini par construire des estimateurs du maximum de vraisemblance dont les propriétés sont maintenant bien connues (Prescott et Walden, 1980 et 1983, Tiago de Oliveira, 1980, Cohen, 1984, Mann, 1984, Smith, 1985, Hougaard, 1986).

Un des récents développements de la théorie des valeurs extrêmes a consisté à lever l'hypothèse d'indépendance des observations  $X_1, \dots, X_n$ . Dans une première étape, on a supposé que les observations sont identiquement distribuées mais dépendantes. Elles forment alors un processus stationnaire par

exemple Markovien ou fortement mélangeant (Rosenblatt, 1956, Leadbetter, 1974, 1978 et 1982 ou Leadbetter, Lindgren et Rootzèn, 1983). On suppose aussi qu'il existe certaines formes de corrélation entre les observations (Berman, 1964a et 1964b). Dans le cas de variables aléatoires  $m$ -dépendantes, on dispose des travaux de Watson (1954), Loynes (1965), Philipp (1971), Ibradjimov et Linnik (1971), Lai et Robbins (1976) et plus récemment, de ceux de Hall (1996). Sous certaines conditions de  $m$ -mélangeance, Loynes (1965) par exemple, a montré que certains résultats concernant les v.a. i.i.d. demeurent valides, notamment ceux portant sur les théorèmes fondamentaux des valeurs extrêmes (max-stabilité des distributions, C.N.S. d'appartenance à un domaine d'attraction, etc, ...). De son côté, sous des hypothèses relatives aux autocorrélations des observations, Berman (1964a et 1964b) a montré que la loi des maxima d'une suite stationnaire  $(X_n)$  est l'une des trois lois traditionnelles des valeurs extrêmes correspondant aux v.a. i.i.d.. Pour les chaînes de Markov, on renvoie à Neuts (1967), Resnick (1971) et Takàcs (1975). Dans une troisième catégorie, on peut ranger les travaux tels que ceux proposés par Hüsler (1985) qui remettent en cause à la fois l'hypothèse de stationnarité et celle d'indépendance dans l'analyse des valeurs extrêmes. Cette dernière catégorie d'étude demeure cependant peu développée. Les problèmes de dépendance ont aussi été abordés dans le cas des processus bivariés (Pickands, 1981, Deheuvels, 1984, Tawn, 1988) ou plus généralement dans un cadre multivarié (Resnick, 1987 ou Hüsler, 1994).

Dans le cas de variables aléatoires dépendantes (type mélangeance) univariées, les résultats concernant les distributions des maxima sont donc similaires, sous certaines conditions, à ceux obtenus dans le cas i.i.d.. En particulier, la distribution obtenue pour  $G_\alpha$  est encore de type max-stable (Leadbetter, Lindgren et Rootzèn, 1983). En particulier, dans le cas de v.a. dépendantes Gaussiennes, on montre que sous des conditions particulières sur l'autocovariance des observations, la distribution des maxima converge vers une loi de type Gumbel (Slepian, 1962, Cramer et Leadbetter, 1967). Une analyse des vitesses de convergence correspondant au cas dépendant a été proposée par Rootzèn (1982).

Pour des processus mélangeants, on dispose aussi de la distribution des  $k$ -plus grandes valeurs de la série. On montre que celle-ci est une distribution de type Poisson (Adler, 1978). L'étude des distributions des statistiques d'ordre a été faite notamment par Glick (1978) et Resnick (1975). Rappelons que, dans certains cas, on peut aussi identifier la distribution de la variable décrivant l'évolution du nombre de périodes séparant deux événements extrêmes (période de retour). Dans le modèle de Gumbel par exemple cette variable

suit une distribution géométrique (Herbach, 1984).

Pour des processus non stationnaires à composantes saisonnières surajustées au modèle stationnaire, Horowitz (1980), Hüsler (1981), Ballerini et Mc Cormick (1989) ou encore Niu (1996 et 1997) obtiennent pour  $M_n$ , une distribution limite du même type que celle obtenue pour des processus Gaussiens. En revanche, leur vitesse de convergence est plus faible (Mittal et Ylvisaker, 1975 et Mittal, 1974). Le cas des processus à temps continu a été développé dans Leadbetter, Lindgren et Rootzèn (1983). Enfin, l'étude des processus dont la distribution des maxima converge vers une loi dégénérée a été faite par Gnedenko (1943), Geoffroy (1958/1959), Anderson (1970) et de Haan (1970). Dans ce papier, nous n'étudierons ni les processus à temps continu, ni ceux dont la distribution converge vers une loi dégénérée.

L'application de la théorie des valeurs extrêmes à des données financières, pour lesquelles les hypothèses d'indépendance, de stationnarité et de gaussianité des distributions sont souvent rejetées, exige des résultats plus généraux que ceux rappelés précédemment. C'est donc dans ce contexte que se situe le travail développé dans ce papier. Ainsi, après avoir rappelé certains résultats, établis dans le cas indépendant, et qui nous seront utiles par la suite, nous allons surtout nous intéresser au cas dépendant (ou tout au moins à certaines formes de dépendance). Les interdépendances, avérées entre les marchés financiers, imposent la nécessité de faire le point, au moins au niveau théorique, sur les avancées de l'étude des valeurs extrêmes dans un cadre multivarié.

Nous commençons donc par rappeler dans le paragraphe 1 les résultats existants pour des suites de variables aléatoires indépendantes, puis pour celles présentant certaines formes de dépendance. Dans le paragraphe 2 nous abordons le problème des valeurs extrêmes des processus linéaires et des processus non linéaires (pour lesquels les approches demeurent très parcellaires). Dans le paragraphe 4, nous faisons une analyse des propriétés des estimateurs usuels des paramètres des distributions asymptotiques rencontrées dans les deux paragraphes précédents. Ensuite, en Section 4, nous présentons une brève revue de la littérature sur l'analyse des valeurs extrêmes pour les processus multivariés. Il s'agit de donner dans un premier temps les résultats portant sur le cas bivarié, objet d'étude abondante et approfondie, avant de reprendre l'analyse des résultats dans un cadre plus général. Ce paragraphe sera clos par une présentation des performances des modèles de corrélations constantes (Starica, 1999), un cas particulier de modèles multivariés d'analyse des valeurs extrêmes qu'on peut comparer aux modèles *ARCH* multivariés de la même classe. Dans le paragraphe 5 nous étudions le comportement (en



termes de densités) de séries de maxima et de minima issues de processus aussi variés que les processus ARMA, bilinéaires, Self Exciting Threshold et ARCH, à partir d'une étude de type Monte Carlo. Nous nous attarderons plus particulièrement sur l'étude des modèles AR avec bruit ARCH ainsi que sur les modèles de volatilité stochastique, ce qui nous amènera à commenter certains résultats présentés respectivement par Borkovec (1999) et Breidt et Davis (1998). Quelques pistes de recherche sont alors proposées dans le paragraphe 6 dans l'optique d'améliorer les performances empiriques de cette théorie notamment dans ses applications à la finance.

## 1 Distribution des maxima pour des suites de variables aléatoires

Dans un premier temps, la théorie des valeurs extrêmes a concerné le comportement d'évènements rares apparaissant dans des suites de variables aléatoires indépendantes. Un des principaux problèmes abordés est relatif à la somme de v.a. i.i.d.. Ceci correspond au comportement d'une marche aléatoire qui apparaît comme un cas particulier du mouvement brownien. Une abondante littérature est consacrée à ce thème. Elle inclut des résultats classiques concernant le théorème central limite, la loi faible des grands nombres, la loi des itérés de logarithmes, le théorème central limite fonctionnel et d'autres extensions. On peut citer comme exemple de travaux fondateurs ceux de Breiman (1968), Feller (1971), Chow et Teicher (1978), Loève (1977) ou Fergusson (1996). Pour des contributions plus techniques, on peut se référer, par exemple, aux travaux de Rachev (1991) et Petrov (1995). Pour des applications de cette théorie, notamment à la finance ou à l'assurance, les livres de Embrecht, Klüppelberg et Mikosch (1998) et de Reiss et Thomas (1997) sont des références utiles.

L'intérêt de l'application de la théorie des valeurs extrêmes aux données financières ou à celles relatives aux assurances par exemple, peut se trouver dans l'analyse de la distribution des maxima ou des minima des séries concernées. Pour la finance, on peut citer l'exemple des récentes crises de 1997 et de 1998 (crises asiatiques et russe). Il est évident que les gestionnaires de portefeuille doivent se prémunir contre de telles crises. Il suffit de rappeler les catastrophes (tremblements de terre, inondations, orages, tempêtes, accidents maritimes, ...) qui ont dévasté pratiquement tous les continents au cours de l'année 1999 pour imaginer à quel point la connaissance des distri-

butions des évènements rares est une préoccupation majeure des assureurs (voire des principaux acteurs économiques). Dans les deux cas, la connaissance de la distribution des maxima ou minima apparaît comme un excellent outil d'aide à la décision. C'est donc vers l'identification et l'estimation des paramètres de ces distributions que nous allons maintenant nous orienter (Weissman, 1978, 1980, 1982).

Auparavant, nous allons rappeler un résultat fondamental qui permet de faire le lien entre la théorie fondée sur le comportement asymptotique de la distribution d'une somme de v.a. i.i.d. et celui de la distribution des maxima. Il s'agit du théorème de Heyde (1967) sur les grandes déviations. La théorie des grandes déviations (ou des grands écarts) concerne la loi faible des grands nombres.

Notons  $X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $F$  et  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Selon la loi faible des grands nombres,  $\frac{S_n}{n}$  converge en probabilité vers 0. On montre alors que les grandes déviations sont rares et que  $P(S_n > na) \simeq e^{-nh(a)}$  où  $h(\cdot)$  est une fonction continûment différentiable. Par ailleurs, par abus de langage, on dit qu'une variable aléatoire appartient au domaine d'attraction d'une fonction  $G_\alpha$ ,  $D(G_\alpha)$ , au lieu de, la fonction de distribution  $F$  appartient à  $D(G_\alpha)$ .

**Théorème :** *Soient  $X$  une variable aléatoire appartenant au domaine d'attraction  $D(G_\alpha)$  avec  $\alpha \in (0, 2)$ ,  $(b_n)$  une suite croissante de réels telle que :  $P(X > b_n) \sim \frac{1}{n}$  et enfin,  $M_1 = X_1$  et  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ ,  $n > 2$ . Alors :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > b_n x_n)}{nP(X > b_n x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > b_n x_n)}{nP(M_n > b_n x_n)} = 1,$$

pour toute suite  $x_n \rightarrow \infty$ .

Des résultats analogues à celui-ci peuvent être établis pour des variables aléatoires dont la distribution affiche des comportements réguliers que l'on peut caractériser de la manière suivante :  $1 - F(x) \sim x^{-\alpha}L(x)$ , pour  $\alpha > 2$ , quand  $x \rightarrow \infty$  et où  $L$  est une fonction à variation lente.

Le théorème précédent peut être compris et interprété comme le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = 1.$$

Autrement dit, pour un nombre entier  $n$  grand, la probabilité pour qu'une somme de réalisations d'une suite de  $n$  variables aléatoires dépasse un seuil  $x$

(grand) est proche de la probabilité pour que la plus grande des réalisations de cette suite dépasse  $x$ . Ainsi, pour qu'une somme de variables aléatoires dépasse un seuil  $x$ , il suffit qu'une de ses composantes prenne une valeur extrême très supérieure aux valeurs prises par chacun des autres éléments de la suite. Cette réalisation est l'évènement rare dont on cherche à identifier et à estimer la distribution.

Partant du fait que la somme des  $(X_i)$  se comporte comme leur maximum, nous allons maintenant nous inscrire dans l'approche probabiliste des valeurs extrêmes en nous intéressant uniquement à la loi des maxima d'une suite de variables aléatoires.

## 1.1 Lois des maxima pour des suites indépendantes

Dans la suite de cette étude, nous allons adopter les notations suivantes :

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 2; \quad M_1 = X_1$$

et

$$m_n = \min(X_1, \dots, X_n) = -\max(-X_1, \dots, -X_n).$$

La distribution (i.e. la fonction de répartition) de  $M_n$  associée à une suite  $(X_1, \dots, X_n)$  de v.a. i.i.d. est définie par :

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F^n(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Le point le plus à droite est :

$$\alpha_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

Concernant le comportement des maxima d'une série de v.a. i.i.d., le résultat le plus important est fourni par le théorème de Fisher-Tippett (donné pour des maxima centrés et réduits, un théorème analogue est aussi disponible pour les minima).

**Théorème :** Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. i.i.d.. S'il existe des constantes de normalisation  $c_n > 0$ ,  $d_n \in \mathbb{R}$  et une loi non dégénérée  $G_\alpha$  telle que

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} G_\alpha \tag{1}$$

alors  $G_\alpha$  est de la forme suivante :

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \alpha x)^{-\frac{1}{\alpha}}) & \alpha \neq 0, 1 + \alpha x > 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \alpha = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

On déduit les trois familles habituelles de distributions (dites lois standard ou traditionnelles) des valeurs extrêmes non dégénérées :

. Fréchet (type III) :  $\Phi_\alpha(x) = G_{1/\alpha}(\frac{x-1}{1/\alpha}) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \alpha > 0 \end{cases}$

. Weibull (Type II) :  $\Psi_\alpha(x) = G_{-1/\alpha}(\frac{x+1}{1/\alpha}) = \begin{cases} \exp\{-(-x^\alpha)\}, & x \leq 0, \alpha > 0 \\ 1 & \end{cases}$

. Gumbel (Type I) :  $\Lambda(x) = G_0(x) = \exp(-e^{-x}), x \in \mathbb{R}$

Pour les variables non centrées et non réduites <sup>1</sup>, on peut écrire  $G_\alpha(x)$  sous une forme plus générale (appelée forme paramétrée de von Mises, 1923) dans laquelle on fait apparaître un paramètre  $\mu$  de localisation et un paramètre d'échelle  $\sigma$  (Weissman, 1978) :

$$G(x; \mu, \sigma, \gamma) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \alpha\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right) & \alpha \neq 0, 1 + \alpha\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0 \\ \exp\left(-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right) & \alpha = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

On peut passer de l'une des trois lois à l'autre relativement facilement. Si la variable aléatoire  $Y_n$  suit une distribution de Weibull, par exemple, alors la variable aléatoire  $X_n$ , ( $X_n = \text{Log}Y_n$ ), suit une distribution de Gumbel tandis que la variable aléatoire  $U_n$ , ( $U_n = Y_n^{-1}$ ), est décrite par une distribution de Fréchet.

Le paramètre  $\alpha$  qui apparaît dans l'expression générale est appelé l'indice de queue. Au signe près, c'est l'inverse du paramètre de forme, appelé aussi  $\alpha$ , qui apparaît dans les lois de Fréchet et de Weibull. C'est Gnedenko (1943) qui a défini les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des constantes de normalisation. Quand la loi de la variable  $X$  est connue, ces conditions peuvent être utilisées pour déterminer le type de la loi limite. Les lois à support borné comme la loi uniforme appartiennent en majorité au domaine d'attraction de la loi de Weibull (type III). Les lois dont les queues de dis-

---

<sup>1</sup> $G_\alpha$  représente la fonction de distribution de la loi générale des extrêmes. Les fonctions de densité,  $g_\alpha$ , correspondantes s'écrivent :

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}})(1 + \alpha x)^{-(1+\frac{1}{\alpha})} & \alpha \neq 0, 1 + \alpha x > 0 \\ \exp(-e^{-x})e^{-x} & \alpha = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \blacksquare$$

tributions décroissent de façon exponentielle (lois de Gauss, du  $\chi^2$  et exponentielles) appartiennent en majorité au domaine d'attraction de la loi de Gumbel (type I). Les lois de Student appartiennent en majorité au domaine d'attraction de la loi de Fréchet (type II). Dans ce cas, le paramètre de forme  $\alpha$  est égal au nombre de degrés de liberté (de la loi de Student) et l'indice de queue est tel que  $0 > \alpha \geq -0,5$ . Pour les lois de Cauchy et les autres lois stables de Pareto, le paramètre de forme  $\alpha$  est l'exposant caractéristique et l'indice de queue vérifie  $\alpha < -0,5$ . Les lois de type I et III doivent posséder tous leurs moments (tronqués à gauche). Seules les lois non bornées à droite peuvent appartenir au type II. Les moments tronqués d'ordre  $r$  pour les lois de type II existent seulement pour les valeurs de  $r$  inférieures à  $\alpha$ . Le paramètre  $\alpha$  correspond au plus grand ordre pour lequel les moments (tronqués à gauche) sont définis.

Le théorème précédent est une extension classique du théorème central limite, où les distributions  $\alpha$ -stables sont les seules distributions limites possibles. Leadbetter, Lindgren et Rootzèn (1983) et Resnick (1987) ont proposé une revue d'ensemble détaillée sur ces questions.

Dans certains cas, il est, bien sûr, possible d'identifier la distribution de  $M_n$  si on connaît explicitement la distribution  $F$  des v.a. i.i.d.  $X_i$ . Un des problèmes épineux dans les applications est de pouvoir répondre à la question suivante : étant donnée une distribution de valeurs extrêmes  $G_\alpha$ , sous quelles conditions la fonction de distribution  $F$  des maxima  $M_n$  normalisés converge-t-elle faiblement vers  $G_\alpha$  ? Autrement dit, comment faut-il choisir les suites de normalisation  $c_n > 0$  et  $d_n \in \mathbb{R}$  permettant de satisfaire la relation (1) ? Hall (1979) propose, au moins, une réponse partielle à ces questions en déterminant une procédure optimale de choix des suites  $c_n$  et  $d_n$ . Afin de répondre de manière plus globale à ces questions, nous allons préciser la notion de domaine d'attraction correspondant à l'ensemble des fonctions de distribution  $F$  pour lesquelles la somme normalisée  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  a la même distribution limite stable.

**Définition** : *On dit qu'une v.a.  $X$  appartient au domaine d'attraction de la distribution des valeurs extrêmes  $G_\alpha$  s'il existe des suites réelles  $c_n > 0$ ,  $d_n \in \mathbb{R}$  telles que la condition (1) soit vérifiée.* ■

A l'aide de cette définition, on peut aisément vérifier si une distribution appartient au domaine d'attraction de l'une des trois distributions standard des valeurs extrêmes. On dispose ainsi d'un théorème de caractérisation permettant d'identifier le domaine d'attraction des maxima d'une loi donnée. Dans

le cas des distributions usuelles, pour des variables aléatoires indépendantes, on peut résumer les résultats dans le tableau synthétique suivant :

<b>Distrib.F</b>	<b>Loi des Max.</b>	<b>Loi des Min.</b>
Normale	Gumbel	Gumbel
Cauchy	Fréchet	Fréchet
Uniforme	Weibull	Weibull
Pareto	Fréchet	Weibull
Gamma	Gumbel	Weibull
Exponentielle	Gumbel	Weibull

On montre aussi que les distributions lognormale et  $\chi^2$  appartiennent pour leur maxima au domaine d'attraction de la loi de Gumbel. Dans les exemples précédents, pour les maxima, la loi de Gumbel correspond à cinq distributions  $F$  distinctes (normale, Gamma, exponentielle, lognormale, et  $\chi^2$ ). De même pour les minima, la distribution de Weibull apparaît comme la loi asymptotique de plusieurs fonctions de répartition (uniforme, Pareto, Gamma, exponentielle). Se pose alors la question suivante : comment savoir si les distributions limites correspondent à telle ou telle distribution  $F$  ? Tout d'abord, quel que soit le choix de  $c_n$  et de  $d_n$ , il peut ne pas exister de distribution limite correspondant à la distribution  $F$ . En particulier si  $F$  est une distribution de Poisson ou un mélange de lois Gaussiennes et de lois de Poisson, ce qui correspond à des variables aléatoires présentant des sauts, la distribution limite n'existe pas. En finance, des variables telles que le taux de change et les cours boursiers peuvent suivre des distributions présentant des sauts, en particulier, lorsqu'elles sont observées en haute fréquence. Toutefois, on dispose de conditions nécessaires et suffisantes (C.N.S.) sur les distributions  $F$  permettant d'obtenir l'une des trois distributions limites précédentes obtenues pour  $M_n$ .

Précisons maintenant les conditions nécessaires sur les distributions  $F$  pour obtenir l'une des lois limites définies précédemment :

- Cas d'une loi de type I (Gumbel) : s'il existe une fonction continue  $A(x)$  telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = 0$  avec  $x_0 < \infty$ , si  $F(x_0) = 1$  et  $F(x) < 1$  pour  $x < x_0$  et si pour  $h > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[1 - F\{x(1 + hA(x))\}]}{[1 - F(x)]} = e^{-h},$$

alors  $F$  appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel. C'est à Von Mises (1923) que l'on doit ce résultat. de Haan ( 1971) a proposé

une C.N.S. pour que  $F$  appartienne au domaine d'attraction de la loi de Gumbel.

- Cas d'une loi de type II ( Weibull ) : si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[1 - F(x)]}{[1 - F(kx)]} = k^\alpha, \alpha > 0, k > 0,$$

alors  $F$  appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull (Gnedenko, 1943);

- Cas d'une loi de type III (Fréchet) : s'il existe  $x_0 < \infty$ , tel que  $x_0 = \sup\{x, F(x) < 1\} < \infty$ , et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1 - F(x_0 - kh)]}{[1 - F(x_0 - h)]} = k^\alpha, k > 0, \alpha > 0, h \in \mathbb{N}$$

alors  $F$  appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet. Ce résultat est dus à Gnedenko (1943).

On montre que si une distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull ou de Fréchet alors elle appartient aussi au domaine d'attraction de Gumbel (Gnedenko, 1943). C'est l'une des raisons pour laquelle l'on retient fréquemment la distribution de Gumbel dans les applications (Herbach, 1984). C'est aussi pour cette raison que la distribution de Gumbel sert de référence pour définir l'hypothèse nulle dans les tests de diagnostic des lois asymptotiques des maxima (Hasofer et Wang, 1992, Alves, 1992 ou, plus récemment, Alves et Gomes, 1996).

A titre d'exemple, on peut vérifier que, si  $x_0 = \infty$  et  $A(x) = \frac{1}{x^2}$ , la distribution normale appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel. On n'en déduit pas pour autant  $c_n$  et  $d_n$ . En revanche, on peut définir le comportement asymptotique de la loi des maxima même si on ne connaît pas la distribution  $F$ . Celui-ci est obtenu à partir du lemme suivant :

**Lemme :** Si  $(X_n)$  est une suite de v.a. i.i.d. de loi  $F$ ,  $\tau \geq 0$  et  $(u_n)$  une suite de nombre telle que

$$1 - F(u_n) = \frac{\tau}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

alors

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau} \quad n \rightarrow \infty \quad (3)$$

où  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ . ■

Si la relation (3) est vérifiée alors (2) l'est aussi pour  $\tau \geq 0$ . Par ailleurs, si  $F$  n'est pas continue, il n'est pas nécessairement possible de trouver une suite  $(u_n)$  qui satisfasse (2). C'est le cas de la distribution de Poisson. On n'identifie donc pas toujours la loi limite des  $M_n$ .

Le lemme précédent permet de déterminer les suites  $c_n$  et  $d_n$  dans certains cas. Supposons que ces suites existent de telle manière que l'on puisse écrire pour un  $x$  donné :  $u_n = xc_n + d_n$ , alors à partir de l'expression (2), on a :

$$n(1 - F(u_n)) \rightarrow \tau = \tau(x) \quad (4)$$

et

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau},$$

avec

$$P(c_n^{-1}(M_n - d_n) \leq x) \rightarrow e^{-\tau(x)} = G_\alpha(x).$$

Si  $(X_n)$  est une suite de v.a. i.i.d. Gaussiennes par exemple, et si  $\tau > 0$ , on cherche  $u_n = xc_n + d_n$  telle que l'équation (4) soit vérifiée. Ainsi  $1 - \Phi(u_n) \sim \frac{\tau}{n}$  où  $\Phi$  et  $\phi$  représentent respectivement la distribution et la densité de la loi normale centrée et réduite ( $N(0, 1)$ ). Quand  $u \rightarrow \infty$ ,  $1 - \Phi(u) \sim \frac{\phi(u)}{u}$  ( $\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$ ). On veut montrer que  $n\frac{\phi(u_n)}{u_n} \rightarrow \tau$ . En transformant cette dernière relation par les logarithmes, on obtient :

$$\frac{u_n^2}{2} + \log u_n - \log n + \frac{1}{2} \log 2\pi + \log \tau \rightarrow 0, \quad (5)$$

et on en déduit qu'il est nécessaire que  $\frac{u_n^2}{2 \log n} \rightarrow 1$  pour que la relation  $n\frac{\phi(u_n)}{u_n} \rightarrow \tau$  soit vérifiée (Hall (1979)). Or, comme

$$\log u_n = \frac{1}{2}(\log 2 + \log \log n + o(1)),$$

on obtient :

$$u_n = (2 \log n)^{1/2} \left[ 1 - \frac{\log \tau + \frac{1}{2} \log 4\pi + \frac{1}{2} \log \log n}{2 \log n} + o\left(\frac{1}{\log n}\right) \right],$$

On choisit alors :

$$(6) \quad \begin{cases} c_n^{-1} &= (2 \log n)^{\frac{1}{2}} \\ d_n &= (2 \log n)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2 \log n)^{\frac{1}{2}}(\log \log n + \log 4\pi) \end{cases}.$$

Donc pour satisfaire (5),  $u_n$  doit être égale à :

$$u_n = -\frac{\log \tau}{a_n} + b_n + o(\log n)^{-\frac{1}{2}}.$$



D'où la proposition suivante :

**Proposition :** Si  $X_1, \dots, X_n, \dots$  est une suite de v.a. i.i.d. de loi  $N(0, 1)$  et si  $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  alors

$$P(c_n^{-1}(M_n - d_n) \leq x) \rightarrow \exp(-e^{-x}) \quad n \rightarrow \infty$$

et les suites  $(c_n)$  et  $(d_n)$  sont définies par le système d'équations (6). ■

Considérons maintenant un actif prenant des valeurs ne pouvant pas, en principe, dépasser un seuil donné (par exemple une valeur critique, l'excès ou l'excédent par rapport à un seuil fixé). Il peut être utile d'étudier le nombre de fois où ce seuil a été dépassé ainsi que la distribution de ces points sur une période donnée. La connaissance de ces événements peut être utile dans les évaluations de primes de risque, ou plus généralement, pour les gestionnaires. A titre d'exemple, on peut estimer le nombre de fois où un fleuve dépasse un niveau donné afin d'évaluer les risques de débordement. On peut aussi analyser le nombre de fois où un indice boursier ou un taux de change se retrouve au dessus d'un seuil fixé pour estimer le risque correspondant à un portefeuille composé de plusieurs actifs. Lorsqu'on examine le comportement de la variable d'excès, le résultat présenté dans le lemme suivant peut être utile.

Soient  $S(u_n)$  le nombre de points qui dépasse  $u_n$  :

$$S(u_n) = \text{card}\{i | X_i \geq u_n\}.$$

**Lemme :** Soient  $X_1, X_2, \dots$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $F$  et  $(u_n)$  une suite de réels telle que la condition (1) soit vérifiée, alors  $1 - F(u_n) = \frac{\tau}{n} + o(\frac{1}{n})$ , et  $S(u_n)$  suit une loi de Poisson i.e.

$$P(S(u_n) \leq k) = e^{-\tau} \sum_{j=0}^k \frac{\tau^j}{j!} \quad k \in \mathbb{N} \quad (6)$$

et inversement. ■

Ainsi le nombre de points qui dépasse un seuil fixé est décrit par une loi discrète. Si on connaît la loi de probabilité du nombre de points qui dépasse un certain seuil, on peut en déduire la loi de probabilité de la  $k^{\text{ième}}$  plus grande valeur, notée  $M_n^{(k)}$ , car si  $k$  est fixé, on peut trouver  $u_n$  telle que l'on ait  $k$  valeurs au dessus de ce seuil. C'est donc le même type de problème que l'on cherche à résoudre :

**Lemme :** Soit  $X_1, X_2, \dots$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $F$  telle que

$$P(c_n^{-1}(M_n - d_n) \leq x) \rightarrow G_\alpha(x)$$

alors pour  $k$  fixé :

$$P[c_n^{-1}(M_n^{(k)} - d_n) \leq x] \rightarrow G_\alpha(x) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-\log G_\alpha(x))^j}{j!}$$

Les  $M_n^{(k)}$  ont donc des distributions limites fondées sur les trois distributions traditionnelles des valeurs extrêmes. ■

## 1.2 Les extrêmes des suites de variables aléatoires dépendantes

Comme on l'a signalé dans l'introduction, l'une des pistes naturelles de généralisation de la théorie traditionnelle des valeurs extrêmes repose sur la remise en cause de l'hypothèse de dépendance des variables aléatoires  $X_i$ . Il s'agit maintenant de proposer des réponses appropriées aux questions précédentes dans le cas d'une suite d'observations dépendantes. D'abord, les résultats actuels concernant les suites dépendantes sont, pour la plupart, des extensions de ceux développés dans le cas indépendant. Ensuite, ces résultats sont, pour l'essentiel, très difficiles à mettre en application sur des exemples concrets. Enfin, plusieurs conditions de dépendance ont été analysées dans la littérature théorique ; il est, par conséquent, nécessaire de préciser celles qui sont utilisées ici.

On peut mesurer la dépendance entre le passé des v.a.  $X_j$  (i.e. avant  $j = m$ ) et leur futur  $X_j$  (i.e. après  $j = n$ ), suivant la vitesse avec laquelle leur séparation en  $n = m$  augmente. On définit alors des conditions de mélangeance sur les variables. La condition de mélangeance peut être vérifiée sous de faibles hypothèses concernant les auto-covariances entre les variables aléatoires. Signalons que l'hypothèse de la mélangeance a souvent été retenue dans le cas des variables Gaussiennes stationnaires.

- Une façon intuitive de définir la notion de  $m$ -dépendance (ou de mélangeance) pour des v.a. est la suivante : les v.a.  $X_i$  et  $X_j$  sont dépendantes quand  $|i - j| \leq m$  et indépendantes quand  $|i - j| > m$ . Plus précisément, pour  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , si on note :

$$F_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_n} \leq x_n),$$

la  $m$ -dépendance correspond à : si  $i_1 < i_2 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_q$ , avec  $j_1 - i_p > m$ , alors,

$$F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = F_{i_1, \dots, i_p}(x_1, \dots, x_p) F_{j_1, \dots, j_q}(y_1, \dots, y_q).$$

- Si les  $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$  sont égaux, alors on obtient la condition  $D$  (souvent mentionnée dans la littérature, voir Leadbetter, Lindgren et Rootzèn, 1983 par exemple). Elle est plus faible que la  $m$ -dépendance et se définit de la manière suivante :

Condition  $\boxed{D}$  : pour tout choix de  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_q$ , tel que,  $j_1 - i_p \geq \ell$ , on a

$$|F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(u) - F_{i_1, \dots, i_p}(u) F_{j_1, \dots, j_q}(u)| \leq \alpha_i(\ell)$$

où  $\alpha_i(\ell) \rightarrow 0$  quand  $\ell \rightarrow \infty$ .

- On introduit maintenant une condition plus faible que  $D$ , appelée la condition  $D(u_n)$  (Leadbetter, Lindgren et Rootzèn, 1983, Hsing, 1984) : posons  $A = \{X_{i_1} \leq u, \dots, X_{i_p} \leq u\}$  et  $B = \{X_{j_1} \leq u, \dots, X_{j_q} \leq u\}$ , la condition est alors la suivante :

Condition  $\boxed{D(u_n)}$  : Etant données une suite de réels  $(u_n)$  et une suite d'entiers naturels  $i_1 < i_2 < \dots < i_p < j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n$ , telle que  $j_1 - i_p \geq \ell$ , la condition  $D(u_n)$  est vérifiée si on a

$$|F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(u_n) - F_{i_1, \dots, i_p}(u_n) F_{j_1, \dots, j_q}(u_n)| \leq \alpha_{n, \ell_n}$$

où  $\alpha_{n, \ell_n}$  ne croît pas avec  $\ell_n$ , et où la suite  $\ell_n$ , est telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n, \ell_n} = 0$  et  $\frac{\ell_n}{n} \rightarrow 0$ .

On montre que pour les  $\alpha_{(n, \ell_n)}$  ne croissant pas avec  $\ell_n$  pour  $n$  fixé, les conditions  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n, \ell_n} = 0$  et  $\frac{\ell_n}{n} \rightarrow 0$  peuvent être réécrites sous la forme  $\alpha_{(n, [n\lambda])} \rightarrow 0$  pour chaque  $\lambda$  positif ( $[A]$  étant la partie entière de  $A$ ).

- La forte mélangeance (*strong mixing*) des suites stationnaires, décrite par la condition (7) ci-dessous est une façon alternative de définir la dépendance entre les variables aléatoires (Rosenblatt, 1956). Etant données une suite de v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et une suite  $\alpha_l \rightarrow 0$ , quand  $l \rightarrow \infty$ , on dit que les v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont fortement dépendantes si :

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| < \alpha_l, \tag{7}$$

pour  $A \in \sigma(X_1, \dots, X_p)$ ,  $B \in \sigma(X_{p+l+1}, X_{p+l+2}, \dots)$ ,  $\forall p, \forall l$ .

- Si l'hypothèse de forte mélangeance est vraie alors la condition  $D$  est vérifiée, ceci entraînant à son tour l'acceptation de la condition  $D(u_n)$ .

**Théorème** : Soient  $X_1, \dots, X_n, \dots$  une suite de v.a. stationnaires et deux suites réelles  $c_n > 0$  et  $d_n \in \mathbb{R}$  telles que :

$$P(c_n^{-1}(M_n - d_n) \leq x) \xrightarrow{\mathcal{L}} G_\alpha(x).$$

Si la condition  $D(u_n)$  est vérifiée pour  $u_n = xc_n + d_n$ , alors la distribution  $G_\alpha(x)$  est de type I, II ou III. ■

La démonstration de ce théorème est fondée sur celle du théorème établi dans le cas indépendant. Pour démontrer ce théorème, il est cependant nécessaire d'utiliser le résultat suivant : pour  $k = 1, 2, \dots$ , il existe des suites  $c_{k_n}$  et  $d_{k_n}$  telles que

$$P^k(c_{k_n}^{-1}(M_n - d_{k_n}) \leq x) \rightarrow G_\alpha(x),$$

quand  $k_n \rightarrow \infty$ . En posant  $N = nk$  (ceci remplace  $n$ ), on divise l'intervalle  $1, 2, \dots, N$  en  $k$  intervalles de longueur  $n$  ( $n$  assez petit). Ainsi, on peut supposer que les maxima observés sur chaque intervalle sont approximativement indépendants. Comme, on le verra plus loin, lorsqu'on remplace la condition  $D(u_n)$  pour une suite  $u_n$  donnée et vérifiant l'égalité  $u_n = xc_n + d_n$  par  $D$ , le théorème précédent demeure juste. Avec les notations qui viennent d'être introduites, on a alors le lemme suivant :

**Lemme** : Soient  $(u_n)$  une suite donnée et  $(X_n)$  une suite stationnaire de v.a. vérifiant la condition  $D(u_n)$ , alors la relation suivante est vraie pour  $k$  fixé ( $N = nk$ ) :

$$P(M_N \leq u_N) - P^k(M_n \leq u_N) \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . ■

Ce lemme permet de démontrer le théorème précédent. On peut aussi obtenir un résultat permettant d'avoir une condition d'existence de la distribution limite des maxima d'une suite de v.a. stationnaires. Ceci est donné dans le théorème suivant :

**Théorème** : Si  $X_1, X_2, \dots$  est une suite de v.a. stationnaires vérifiant la condition  $D(u_n)$  avec une suite  $u_n$  satisfaisant :

$$1 - F(u_n) = \frac{\tau}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau}, \quad n \rightarrow \infty$$

■

Ce théorème généralise le résultat établi dans le cas indépendant où l'on a montré que si  $P[X_1 > u_n] \sim \tau/n$  alors  $P[M_n < u_n] \rightarrow e^{-\tau}$ . On a donc bien les mêmes lois limites (Gumbel, Fréchet et Weibull) dans le cas où les v.a. sont stationnaires et dépendantes au sens de  $D(u_n)$ .

Les résultats associés à la condition (D) sont résumés dans la proposition suivante :

**Proposition :** *Sous la condition (D), le maximum  $M_n$  des v.a.  $X_i$  stationnaires vérifie la condition suivante :*

- (i)  $P[M_n < u_n] = (F(u_n))^n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  et donc  $P[M_n < u_n] = \prod_{i=1}^n (F_i(u_i)) \rightarrow 0(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$
- (ii)  $P[M_n < u_n] \rightarrow \exp(-\tau)$  quand  $n \rightarrow \infty$
- (iii)  $\exists c_n > 0, d_n \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{D} H(\cdot)$  où  $H(x) = \exp(-(\omega(1, x)))$  avec  $\omega(1, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \leq nt} F_i(c_n x + d_n)$ .

■

Comme on l'a signalé dans l'introduction, ce sont Watson (1954), Loynes (1965) et Welsch (1971) qui ont effectué les travaux initiaux relatifs à l'analyse des suites de processus fortement dépendants. Pour l'étude des suites de processus Gaussiens pour lesquels des restrictions simples sont imposées aux autocorrélations (dépendance par exemple), on peut se référer aux travaux de Berman (1971). Enfin, c'est à Leadbetter (1974, 1975) et Adler (1978) que l'on doit l'étude des suites de processus asymptotiquement dépendants au sens de la condition  $D$ .

Par ailleurs, dans le cas des v.a. i.i.d., on a montré plus haut que le nombre de point dépassant un seuil fixé  $S(u_n)$  ( i.e. le nombre de  $X_i$ , ( $1 \leq i \leq n$ ), tel que  $X_i > u_n$ ) est proche de  $M_n$ . Plus clairement, lorsque  $u_n$  est grand, l'égalité suivante est vérifiée :

$$P[M_n < u_n] = P(S(u_n) = 0)$$

ou encore, si  $M_n^{(k)}$  désigne la  $k$ -ième plus grande valeur :

$$P[M_n^{(k)} \leq u_n] = P(S_n \leq k - 1), \quad k = 1, \dots, n.$$

On va maintenant étendre ce type de résultat au cas où le processus  $(X_1, X_2, \dots)$  vérifie les conditions  $D(u)$  et (ou)  $D'(u_n)$ . Précisons la condition  $D'(u_n)$ .

Condition  $\boxed{D'(u_n)}$  : Etant données une suite de réels  $(u_n)$  et une suite de variables aléatoires stationnaires  $X_1, X_2, \dots$  la condition  $D'(u_n)$  est vérifiée si on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup n \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} P(X_1 > u_n, \dots, X_j > u_n) = 0$$

lorsque  $k$  tend vers l'infini ( $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  représente la partie entière de  $\frac{n}{k}$ ).

Cette condition permet de borner la probabilité pour qu'il n'y ait pas plus d'un élément supérieur à  $u_n$  parmi les v.a.  $X_1, \dots, X_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$ .

**Proposition** : Soit un processus stationnaire Gaussien  $(X_n)$  dont la fonction d'autocovariance est définie par  $r_n = \text{cov}(X_j, X_{j+n})$ . Supposons que la suite  $r_n$  vérifie la condition :

$$r_n \log n \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Alors les conditions  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$  sont satisfaites. Si la condition (8) est vérifiée et si  $1 - \Phi(u_n) \sim \tau/n$ , alors :

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau} \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

et il existe deux suites  $c_n > 0$  et  $d_n \in \mathbb{R}$  telles que

$$P[c_n^{-1}(M_n - d_n) \leq x] \rightarrow \exp(-e^{-x})$$

avec

$$\begin{aligned} c_n^{-1} &= (2 \log n)^{\frac{1}{2}} \\ d_n &= (2 \log n)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2 \log n)^{\frac{1}{2}}[\log \log n + d_n]. \end{aligned}$$

Les conditions  $D(u_n)$  et  $D'(u_n)$  se trouvent à la base de l'identification des distributions des maxima des suites de v.a. stationnaires. Ces deux conditions semblent jouer un rôle primordial dans l'existence de la distribution limite des maxima d'une suite de v.a. stationnaires. En effet, lorsque la condition  $D(u_n)$  est vérifiée pour une suite appropriée  $(u_n)$ , le théorème fondamental permet de montrer que pour toute distribution non dégénérée la loi des maxima des v.a. stationnaires  $(X_n)$  appartient au domaine d'attraction de l'une des trois distributions traditionnelles (Gumbel, Fréchet, Weibull). On peut maintenant se demander ce que devient la proposition précédente lorsqu'on relâche la condition  $D'(u_n)$ . Ce sont Loynes (1965, sous la condition de forte mélangeance) et Chernick (1981, sous la condition  $D(u_n)$ ), qui ont fourni une variante de la proposition précédente lorsque la condition  $D'(u_n)$

est abandonnée. Une version de leurs résultats est présentée dans la proposition suivante :

**Proposition :** *Supposons que la suite  $u_n(\tau)$  soit définie pour un  $\tau > 0$  telle que  $(1 - F(u_n)) \rightarrow \frac{\tau}{n}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  et que la condition  $D(u_n)$  soit vérifiée pour tout  $\tau$ . Alors, il existe des constantes  $\theta$  et  $\theta'$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$  telles que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup (M_n \leq u_n(\tau)) = e^{-\theta\tau},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf (M_n \leq u_n(\tau)) = e^{-\theta'\tau}.$$

Par conséquent, si  $P(M_n \leq u_n(\tau))$  a une limite finie pour tout  $\tau > 0$ , alors  $\theta$  est égal à  $\theta'$  et  $P(M_n \leq u_n(\tau)) \rightarrow e^{-\theta\tau}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . ■

## 2 Distribution des extrêmes pour des processus généraux

De nombreux travaux correspondant à l'étude des distributions de classes particulières de processus ont été publiés au cours des dernières années (Weiss, 1984, Diebolt et Guégan, 1994, Borkovec et Klüppelberg, 1998, Longin et Solnik, 1997, Davis, Mikosch et Basrak, 1999, Balkema et Pancheva, 1996, Starica, 1999 ou Longin, 2000, Guégan, 2000) pour les processus multivariés). En revanche, le couplage des études de ces classes de processus avec celles de leurs valeurs extrêmes a été peu développé. Dans ce domaine, on peut citer l'exemple, de Haan, Resnick, Rootzèn et de Vries (1989) pour leur analyse des extrema d'une suite de v.a. engendrée par un  $ARCH(1)$  ou Borkovec (1999) pour son analyse du comportement extrémal d'une suite de v.a. tirées d'un processus  $AR(1) - ARCH(1)$ , Brummelhuis et Guégan (2000) pour un  $GARCH(1, 1)$  ou encore Diop et Guégan (2000) pour un modèle de régression avec bruit général. La pauvreté relative de ce type d'approche est l'une des raisons pour laquelle nous proposons l'analyse de la distribution des maxima, objet central de notre papier, correspondant aux suites engendrées par les processus les plus traditionnels (ARMA, bilinéaire, ARCH, etc.) dans cette partie.

Considérons le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  à temps discret défini par l'équation générique suivante :

$$X_t = g(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}) + \sigma(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q})\varepsilon_t \quad (9)$$

où  $\varepsilon_t$  représente une suite de v.a. i.i.d.,  $g$  et  $\sigma$  des fonctions pouvant être linéaires et / ou non linéaires de leurs arguments. L'équation (9) est la forme générale des processus traditionnels analysés dans ce paragraphe. Nous allons préciser un certain nombre de résultats sur le comportement des extrêmes provenant de processus issus de cette expression.

## 2.1 Notion d'index extrême

Afin d'étudier le comportement asymptotique du maximum d'une série de points issus d'un processus non linéaire, on utilise parfois la notion d'index extrême. Celui-ci intervient, en général, comme on le verra plus loin, dans le calcul de la distribution limite. L'index extrême est défini de la manière suivante :

**Définition :** Soit  $(X_t, t \in Z)$  un processus strictement stationnaire de loi  $F(\cdot)$  et  $\theta$  un nombre positif. Supposons que pour tout  $\tau > 0$ , il existe une suite  $(u_n)$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(u_n)) = \tau$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\theta\tau}.$$

alors  $\theta$  est appelé index extrême de la suite  $(X_t)$ . ■

Dans le cas de v.a. i.i.d. ou de suites faiblement stationnaires,  $\theta$  est égale à 1. Dans le cas des processus linéaires Gaussiens,  $\theta \in (0, 1]$ . Pour un processus linéaire défini par l'équation suivante :

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

où les  $\psi_j$  vérifient la condition  $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j|^\alpha < \infty$  et où  $\varepsilon_t$  est un bruit blanc qui suit une loi  $\alpha$ -stable caractérisée par la condition suivante :

$$P(\varepsilon_1 > x) \sim pP(|\varepsilon_1| > x), P(\varepsilon_1 \leq -x) \sim qP(|\varepsilon_1| > x),$$

alors

$$\theta = (\psi_+^\alpha p + \psi_-^\alpha q) / \|\psi\|_\alpha^\alpha,$$

où  $\psi_+ = \max_j(\psi_j, 0)$  et  $\psi_- = \max_j((-\psi_j), 0)$  et

$$\|\psi\|_\alpha^\alpha = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j|^\alpha (pI_{\psi_j > 0} + qI_{\psi_j < 0}).$$



Les paramètres  $p$  et  $q$  dépendent du coefficient de symétrie de la fonction caractéristique de la variable  $\alpha$  – *stable*. De même si le bruit  $(\varepsilon_t)$  suit une loi de Gumbel, on peut montrer que :

$$\theta = (k^+ p + k^- q)^{-1},$$

où  $k^+ = \text{card}j : \psi_j = 1$  et  $k^- = \text{card}j : \psi_j = -1$ .

L'introduction de cet index pose deux problèmes : comment s'interprète-t-il ? Quel est l'ensemble des valeurs qu'il peut prendre en fonction des paramètres des modèles, lorsqu'il est défini. A notre connaissance, il n'y a pas de réponse générale à ces questions. Toutefois, par définition, cet index sert à déterminer le comportement asymptotique de la loi des maxima mais il ne fournit aucune précision sur cette loi. C'est un résultat plus proche de ceux concernant les grandes déviations que des résultats de la théorie classique des valeurs extrêmes. Il serait intéressant d'avoir un lien clair entre cet index et, par exemple, le coefficient  $\alpha$  qui caractérisent les lois des extrêmes introduits dans le paragraphe précédent. Ce résultat ne semble pas encore exister.

## 2.2 Les processus linéaires

Nous commençons par nous intéresser aux processus vérifiant les conditions  $D(u)$  et  $D(u_n)$  : ils englobent, en particulier, les processus stationnaires linéaires Gaussiens. Ceci implique que les résultats énoncés dans les paragraphes précédents pour des processus vérifiant ces conditions sont encore vrais pour des processus linéaires Gaussiens.

Ainsi, pour la classe des processus ARMA( $p, q$ ) Gaussiens, on dispose de deux types de résultats, l'un sur la loi du max, l'autre sur le comportement asymptotique de la loi du processus, à savoir :

- Soit  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  une suite de v.a. issue d'un processus de type ARMA Gaussien, alors il existe deux suites  $c_n > 0$  et  $d_n$  telles que :

$$P(c_n^{-1}(M_n - d_n) \leq x) \rightarrow G_\alpha(x),$$

où  $G_\alpha(\cdot)$  est une distribution de type I ou II ou III.

- Soit  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  une suite de v.a. issue d'un processus de type ARMA Gaussien (donc vérifiant  $D(u_n)$ ), alors il existe  $\tau > 0$  tel que :

$$P(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau}, n \rightarrow \infty.$$

Notons que l'existence des suites  $c_n$  et  $d_n$  n'est pas liée aux ordres des processus ARMA.

Considérons maintenant les processus linéaires de type moyenne mobile :

- Soit le processus moyenne mobile *infini* défini par :

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}$$

où  $\varepsilon_t$  représente une suite de v.a. i.i.d.. Dans le cas où la queue de la distribution des  $\varepsilon_t$  décroît lentement vers zéro ( $F(x) = \exp(-e^{-x})$ ), on montre que le comportement asymptotique du processus ( $X_t$ ) est proche de celui d'une loi de Gumbel définie pour le minimum d'une série, i.e.  $G_\alpha(x) = 1 - \exp(-e^x)$ . Sous les mêmes hypothèses, et dans le cas d'un processus moyenne mobile *fini*, le comportement de la distribution extrême de la série est proche de celui d'une loi de Fréchet (voir Davis et Resnick, 1991).

- Soit le processus ponctuel ( $X_t$ ) à représentation moyenne mobile défini par l'équation suivante :

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j} \tag{10}$$

où  $\varepsilon_t$  représente une suite de v.a. i.i.d. dont la distribution  $F$  appartient au domaine d'attraction de Gumbel. Sous des conditions classiques de sommabilité pour les coefficients  $c_j$ , on montre que la loi des maxima est proche de celle d'un processus ponctuel, voir Davis et Resnick (1988). Les résultats sont en général très techniques et peu faciles à utiliser dans les applications.

Nous nous intéressons maintenant des processus linéaires non stationnaires :

- Si un processus ponctuel observé ( $Y_t$ ) affiche une tendance, il peut être représenté, pour tout  $t$ , par :

$$Y_t = X_t + \mu_t \tag{11}$$

où  $X_t$  est défini par l'équation (10) et où  $\mu_t$  est une fonction déterministe du temps représentant la partie tendancielle de ( $Y_t$ ). Le processus qui engendre ( $Y_t$ ) est donc non stationnaire. Cette formulation de la non stationnarité a été proposée par Niu (1996, 1997) dans la lignée des travaux de Horowitz (1980) et Ballerini et Mc Cormick (1989). Si le bruit  $\varepsilon_t$  qui apparaît dans l'équation (10) a des queues de distribution qui décroissent régulièrement vers zéro, on montre que le maximum de la suite ( $Y_t$ ) converge faiblement vers un processus proche de celui obtenu dans le cas stationnaire par Davis et Resnik (1988). Par ailleurs, la distribution de la suite  $S(u_n)$  définie précédemment converge faiblement vers un processus de Poisson (Niu, 1996 et 1997).

- La marche aléatoire. Nous considérons le processus défini par l'équation suivante :

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (12)$$

où  $\varepsilon_t$  représente une suite de v.a.i.i.d. On s'intéresse à la loi des points qui dépasse un certain niveau  $x$  donné. On pose :

$$K_T(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (I_{X_{t-1} \leq x, X_t > x} + I_{X_{t-1} > x, X_t \leq x}).$$

La loi de la variable  $K_T(x)$  a été étudiée par Guerre et Burridge (1996). Si les v.a.  $X_0$  et  $\varepsilon_1$  sont caractérisées par des lois bornées, alors

$$K_T(x) \rightarrow \frac{E|\varepsilon_1|}{\sigma} |Z|$$

où  $\sigma$  est la variance finie des  $\varepsilon_t$  et  $Z$  une variable aléatoire qui suit une loi normale  $N(0, 1)$ .

- Le Processus max-AR(1) : on considère le processus  $(X_t)$  défini par l'équation suivante :

$$X_t = X_0 \text{ si } t = 0$$

et

$$X_t = Z_t \max(X_{t-1}, Y_t) \text{ si } t \geq 1 \quad (13)$$

où  $Y_t$  et  $Z_t$  sont des v.a. indépendantes. La distribution des points supérieurs à un niveau donné se comporte comme un processus de type poissonien (Alpuim, Catkan et Husler, 1995). Un cas particulier a été étudié par Hall (1996) en vue d'obtenir le comportement asymptotique de la distribution des maxima.

## 2.3 Les processus non linéaires

Dans ce paragraphe nous donnons des résultats relatifs au comportement des extrêmes pour les processus bilinéaires et de type hétéroscédastiques.

### 2.3.1 Processus bilinéaires.

L'étude des distributions des valeurs extrêmes d'un processus bilinéaire a été abordée par Turkman et Turkman (1997). A partir d'une représentation Markovienne du processus bilinéaire d'ordre un défini par l'équation suivante :

$$X_t = aX_{t-1} + bX_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (14)$$

où  $\varepsilon_t$  représente une suite de v.a. i.i.d.. Ils ont montré que la loi des dépassements par rapport à un seuil  $u_n$  donné, du processus Markovien associé au processus (14), (i.e. la loi de  $S(u_n)$ ) est un processus de type poissonien.

### 2.3.2 Processus hétéroscédastiques.

- Le processus ARCH : le processus  $(X_t)$  défini par l'équation (15) suivante :

$$X_t = (a_0 + a_1 X_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t. \quad (15)$$

(où  $a_0 \geq 0$ ,  $0 < a_1 < 1$  et où  $\varepsilon_t$  est une suite de v.a. i.i.d. de loi normale  $N(0, 1)$ ) est un processus ARCH(1). C'est à de Haan, Resnick, Rootzèn et de Vriès (1989) que l'on doit les résultats portant sur le comportement des extrema tirés d'un processus ARCH(1). Leur démarche s'inscrit dans la lignée des travaux portant sur les équations stochastiques aux différences (Kesten, 1973, Vervaat, 1979). La même approche (représentation Markovienne des processus) a ensuite été appliquée à des processus plus généraux : le processus GARCH (Mikosch et Starica, 1998), les processus ARCH multivariés (Davis et Resnick, 1995, Davis, Mikosch et Basrak, 1998, Starica, 1999) ou encore, au moins dans l'esprit, les processus à volatilité stochastique (Breidt et Davis, 1998).

Rappelons tout d'abord la méthode et les résultats établis par Kesten (1973) et Vervaat (1979). Nous verrons par la suite comment ils s'adaptent à certaines classes de modèles hétéroscédastiques. Soit  $(Y_t, t \geq 1)$  un processus vérifiant l'équation stochastique aux différences suivante :

$$Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t, \quad t \geq 1, \quad Y_0 \geq 0 \quad (16)$$

où  $(A_t, B_t)$  est un couple de v.a. i.i.d. à valeurs dans  $R_+^2$ . La relation précédente est l'équation générique des équations stochastiques aux différences (ou récurrentes). Le résultat principal est le suivant :

**Théorème :** *Supposons que  $Y_t$  vérifie l'équation stochastique (16) et qu'il existe une constante  $\kappa$  strictement positive telle que*

$$EA_1^\kappa = 1, EA_1^\kappa \log^+ A_1 < 0, 0 < EB_1^\kappa < \infty,$$

*supposons que  $\frac{B_1}{1-A_1}$  soit non dégénérée et qu'enfin, pour  $A_1 \neq 0$ , la distribution conditionnelle de  $\log(A_1)$  ne forme pas un treillis, alors :*

- i) *Pour  $(A_1, B_1)$  et  $Y_\infty$  indépendants, l'équation définie par :*

$$Y_\infty = A_1 Y_\infty + B_1$$

*a une solution unique donnée par :*

$$Y_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \prod_{i=1}^{j-1} A_i$$

- ii) Si  $Y_t$  vérifie l'équation (16) et si  $Y_0 = Y_\infty$  alors  $Y_t$  est stationnaire.
- iii) Quel que soit le point initial de  $Y_t$ ,  $Y_t$  converge en probabilité vers  $Y_\infty$ .

– iv) Il existe une constante  $c$  telle que, pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $P(Y_\infty > t) \sim ct^{-\kappa}$ .

Ce théorème montre que, sous des conditions particulières, la distribution limite de  $Y_t$  existe et peut être calculée. En outre, le fait qu'une solution soit stationnaire ne dépend que du choix de la suite initiale. La dernière propriété est une propriété caractéristique des grandes déviations. Pour les applications, les difficultés résident dans la connaissance de  $Y_\infty$ .

Considérons maintenant l'équation (15) qui définit le processus ARCH(1). Posons  $Y_t = X_t^2$ ,  $A_t = a_1 \varepsilon_t^2$  et  $B_t = a_0 \varepsilon_t^2$ . Sous l'hypothèse que les  $\varepsilon_t$  sont i.i.d., alors les v.a.  $A_t$  et  $B_t$  forment des couples  $(A_t, B_t)$  i.i.d. à valeurs dans  $R_+^2$  ( $a_0 > 0$  et  $0 < a_1 < 1$ , par hypothèse). Sous ces conditions, la v.a.  $X_t$  vérifie la relation (16). Pour utiliser le théorème précédent, il suffit donc de vérifier les hypothèses pour la suite  $Y_t = X_t^2$ . Sachant que  $\varepsilon_t$  suit une loi normale,  $A_t$  et  $B_t$  suivent des lois de type  $\chi^2$  (en particulier  $A_1$  et  $B_1$ ) et ont des moments d'ordre supérieur ou égal à un, finis. Le paramètre  $\kappa$  est une solution de l'équation

$$EA_1^\kappa = E(a_1 \varepsilon_t^2)^\kappa = 1.$$

Par exemple pour  $a_1$  connu,  $\kappa$  est une solution de l'équation  $\Gamma(\kappa + \frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}(2a_1)^{-\kappa}$  : si  $a_1 = 0,5$  par exemple,  $\kappa = 2,36$ . Dans le cas des processus ARCH, la condition  $\frac{B_1}{1-A_1}$ , indispensable pour garantir l'existence de la solution  $Y_\infty$  dépendra du choix de la loi de  $\varepsilon_t$  (Borkovec et Klüppelberg, 1998).

Ainsi, lorsque  $X_t$  suit un processus ARCH, sous certaines conditions, *la distribution limite de  $X_t^2$  existe et est stationnaire. La propriété de base des grandes déviations est donc vérifiée pour  $X_t^2$ . Notons que le résultat ne concerne pas le processus  $X_t$ .* Dans ce qui précède, on n'a jamais fait allusion à la dimension de  $X_t$ . Le théorème peut donc être aussi appliqué au cas des modèles ARCH multivariés (Starica, 1999).

Le carré d'un processus de type ARCH (équation 15) étant une solution particulière de l'équation stochastique aux différences (16), on peut analyser le comportement des extrêmes correspondant aux solutions de ce type d'équation.

**Théorème :** *Considérons le processus  $(X_t, t \geq 1)$  défini en (15). Supposons que le processus défini pour tout  $t$  par  $(Y_t = X_t^2, t \geq 1)$  soit stationnaire et vérifie les hypothèses du théorème précédent, alors  $(Y_t)$  a un index extrême  $\theta$  défini par :*

$$\theta = \int_1^\infty P(\text{Max}_{j=1, \dots, \infty} \prod_{i=1}^j A_i \leq y^{-1}) \kappa y^{-\kappa-1} dy,$$

et, pour  $a_t = t^{-\frac{1}{\kappa}}$  et  $x > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(a_t M_t \leq x) = \exp(-c\theta x^{-\kappa})$$

où

$$M_t = \text{Max}_{1 \leq \tau \leq t} (Y_\tau),$$

et où  $c$  est la constante définie dans le théorème précédent.

de Haan *et al* (1989) ont aussi montré que la distribution de  $S(u_t)$ , pour un processus vérifiant (15), où,

$$S(u_t) = \text{card}\{i : \varepsilon_k > u_t, 1 \leq i \leq t\},$$

est de type poissonnien. Ce théorème définit l'index extrême  $\theta$ , comme un paramètre déterminant dans l'identification de la distribution limite du processus  $(Y_t)$ , i.e. du processus  $X_t^2$ , pour les modèles hétéroscédastiques, solutions de l'équation (15). Par ailleurs, avec les paramètres de normalisation suivants, pour les maxima,  $c_t^{-1} = a_t = t^{-\frac{1}{\kappa}}$  et  $d_t = 0$ , la loi limite des maxima tirés du carré du processus ARCH,  $(X_t^2)$ , est une loi de type II. Le processus  $(X_t^2)$  appartient donc au domaine d'attraction de la loi de Weibull. Notons que, au moins pour les carrés des processus ARCH, on sait calculer "à la main" le paramètre  $\kappa$ . Le théorème permet d'évaluer  $\theta$ . En effet, s'il est difficile d'estimer l'index extrême à partir de son expression analytique, on peut obtenir sa valeur par simulation. de Haan *et al* (1989) ont proposé dans leur article, une méthode pour y arriver. Compte tenu de ces éléments, pour déterminer la loi limite des  $(X_t^2)$ , il suffit d'estimer le paramètre d'échelle  $c$ .

- Les processus GARCH. Mikosch et Starica (1998) ont montré qu'un processus GARCH(1,1) défini par

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

et

$$\sigma_t = (\alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t$$

où  $\varepsilon_t$  est une suite de v.a. i.i.d. centrée et réduite vérifie l'équation stochastique aux différences (16). Pour cela, on pose :

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 \varepsilon_t^2 & \beta_1 \varepsilon_t^2 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} \alpha_0 Z_t^2 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Sous des conditions comparables à celles du théorème précédent, on obtient des résultats proches de ceux obtenus pour les processus ARCH. C'est ainsi qu'ils établissent que :

- la variable  $M_{t,\sigma}$  qui correspond à la suite des maxima des variances conditionnelles  $\sigma_\tau$ ,  $0 < \tau < t$ , a une loi limite correspondant à une loi de Fréchet de paramètre  $\theta_\sigma$  (l'index extrême des variances) ;
- la variable  $M_{t,|X|}$  qui correspond à la suite des maxima des variables  $|X_t|$  pour  $\sigma$  donnée appartient aussi au domaine d'attraction d'une loi de Fréchet à la puissance  $\theta_{|X|}$ , l'index extrême de  $|X_t|$  ;
- enfin, la variable  $M_{t,X}$  qui correspond à la suite des maxima des variables  $X_t$  pour  $\sigma$  donnée, admet une loi limite de type Fréchet à la puissance  $\theta_X$ .

Des expressions analytiques de  $\theta_\sigma$ ,  $\theta_{|X|}$  et  $\theta_X$  sont disponibles mais elles sont relativement complexes. Là aussi, on peut obtenir les valeurs de ces paramètres par simulations.

### 2.3.3 Les processus *AR* – *ARCH*

- Propriétés des extrêmes.

L'analyse précédente peut être étendue au cas d'un processus résultant d'un processus *AR* et d'un processus *ARCH*. Considérons les processus définis par l'équation suivante :

$$X_t = \alpha X_{t-1} + (a_0 + a_1 X_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t \quad (17)$$

où  $\varepsilon_t$  représente une suite de v.a. i.i.d.. Ce modèle a été introduit par Weiss (1984). Les propriétés de la distribution des valeurs extrêmes du processus *AR*(1)–*ARCH*(1), ont été étudiées récemment par Borkovec

(1999). Il a obtenu une équation de type (16) en utilisant la transformation  $Z_t = \log(X_t^2)$ , soit

$$Z_t = Z_{t-1} + \log\left(\alpha + \left(a_0 \exp(-Z_{t-1}) + a_1\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t\right).$$

Borkovec (1999) se sert de cette équation pour étudier la distribution asymptotique des processus  $(X_t)$  et  $(X_t^2)$  ainsi que celle des variables  $S(u_t)$  correspondantes. Dans son étude l'hypothèse de normalité de la distribution du bruit  $\varepsilon_t$  n'est pas nécessaire.

**Théorème :** *Supposons que le processus  $(X_t)$  soit défini par l'expression (17) et que  $(\varepsilon_t)$  admette une densité continue et symétrique sur  $R$ , telle que  $E\varepsilon_t^2 < \infty$ . Supposons d'autre part que les paramètres  $\alpha$  et  $a_1$  vérifient l'inégalité  $E \log\left(|\alpha + a_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_t|\right) < 0$ . Alors :*

–  $\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(t^{-\frac{1}{\kappa}} M_t \leq x\right) = \exp\left(-c\theta_1 x^{-\kappa}\right)$  pour  $x$  positif et  $\kappa$  solution de l'équation

$$E\left(|\alpha + a_1 \varepsilon_i|^\kappa\right) = 1,$$

où  $M_t = \text{Max}_{1 \leq \tau \leq t}(X_\tau)$ , et

$$\theta_1 = \kappa \int_1^\infty P\left(\sup_{k \geq 1} \prod_{i=1}^k (\alpha + \sqrt{a_1} \varepsilon_i) \leq y^{-1}\right) y^{-\kappa-1} dy.$$

– si  $X_t^2$  désigne le carré de  $X_t$  alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(t^{-\frac{2}{\kappa}} M_t \leq x\right) = \exp\left(-2c\theta_2 x^{-\frac{\kappa}{2}}\right),$$

avec

$$\theta_2 = \frac{\kappa}{2} \int_1^\infty P\left(\sup_{k \geq 1} \prod_{i=1}^k (\alpha + \sqrt{a_1} \varepsilon_i)^2 \leq y^{-1}\right) y^{-\frac{\kappa}{2}-1} dy$$

où  $M_t = \text{Max}_{1 \leq \tau \leq t}(X_\tau^2)$ .

Ainsi le processus  $(X_t)$  défini en (17) et son carré appartiennent tous les deux au domaine d'attraction de Fréchet. Les deux distributions limites dépendent cependant de leurs index extrêmes respectifs,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .



- Estimation des paramètres et étude empirique.

Comme on vient de le signaler, dans le cas du modèle AR(1) + ARCH(1), la loi des max est donnée par l'expression suivante :

$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(t^{-\frac{1}{\kappa}} M_t \leq x\right) = \exp\left(-c\theta_1 x^{-\kappa}\right)$  pour  $x$  positif et  $\kappa$  solution de l'équation

$$E\left(|\alpha + a_1 \varepsilon_t|^\kappa\right) = 1, \quad (18)$$

où  $M_t = \text{Max}_{1 \leq \tau \leq t}(X_\tau)$ .

A ce niveau, les principaux problèmes concernent l'estimation de  $\kappa$  et de  $c\theta$ . Le choix de la méthode va être discutée. Une discussion portant sur le choix de la taille "idéale" de l'échantillon,  $t$ , doit être également menée car les résultats vont une fois de plus être donnés dans l'asymptotique alors que toutes les applications seront faites à distance finie.

- Détermination de  $\kappa$

Tout d'abord, quand la densité du bruit  $\varepsilon$  est connue (et utilisée pour simuler le processus  $(X_t)$ , ce qui est le cas d'un bruit Gaussien), pour un couple  $(\alpha, \lambda)$  donné, la vérification de la condition (18) est obtenue en calculant l'intégrale par la méthode de Simpson. Supposons alors un couple de valeurs  $(\alpha, \lambda)$  donné. La condition de stationnarité  $E\left(|\alpha + a_1 \varepsilon_t|^\kappa\right) < 1$  s'interprète comme une hypothèse de négativité de la pente à l'origine de la fonction  $x \rightarrow E\left(|\alpha + a_1 \varepsilon_t|^\kappa\right)$ . Ainsi, sous cette condition, le graphique de la fonction est systématiquement convexe. La détermination de la valeur de  $\kappa$  (qui caractérise la loi asymptotique des maxima) peut se faire en utilisant la méthode de Newton - Raphson. Si on représente sur un même graphe l'évolution de  $\kappa$  en fonction de  $\alpha$  et  $a_1$ , on peut faire les remarques suivantes : les zones où  $\kappa$  tend à s'annuler sont les frontières du domaine de stationnarité. Pour un  $a_1$  donné,  $\kappa$  est maximal pour  $\alpha = 0$ , ceci correspond aux distributions du processus  $(X_t)$  dont les queues sont les moins épaisses. Par ailleurs, les décroissances de  $\kappa$ , lorsque l'on s'éloigne de  $\alpha = 0$ , sont symétriques pour  $\alpha > 0$  et  $\alpha < 0$  à cause du rôle de  $\alpha$  (voir définition de la probabilité) et de l'hypothèse de symétrie de la loi de  $\varepsilon_t$ . Enfin, pour  $|\alpha| \leq 1$ , les queues s'alourdissent lorsque  $a_1$  augmente.

- Détermination de  $c\theta$ .

L'estimation de  $c\theta$  est plus délicate. L'approche théorique est difficile, on peut utiliser des simulations. Le résultat donné dans le théorème est asymptotique, i.e. la loi de Fréchet n'est atteinte que si la taille de l'échantillon est infinie. Appelons  $t$  la taille de l'échantillon et  $N$  le nombre de maxima. Ces maxima sont engendrés de manière i.i.d. selon la loi de  $M_t$ . On peut commencer à estimer  $c\theta$  par des méthodes graphiques. En effet, la fonction  $x \rightarrow -\log P\left(t^{-\frac{1}{\kappa}} M_t \leq x\right) = \left(c\theta_1 x^{-\kappa}\right)$  est une fonction linéaire en  $x^{-\kappa}$  de pente  $c\theta_1$  (si  $M_t$  suit une loi de Fréchet de paramètre  $\kappa$ ). Une régression linéaire standard permet alors d'estimer  $c\theta$ . Toutefois, les observations ne sont pas indépendantes, les coefficients estimés par les M.C.O. sont donc biaisés. Une manière plus robuste d'estimer  $c\theta$  consiste à utiliser la méthode du maximum de vraisemblance. Comme les maxima sont tirés de manière indépendante, il est facile de calculer la vraisemblance associée à l'échantillon à partir de la loi de Fréchet (loi théorique des maxima),  $\kappa$  étant supposé connu. On obtient :

$$\hat{c\theta} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N m_i^{-\kappa}},$$

$$\sigma_{asympt} = c\theta,$$

où  $\sigma_{asympt}$  est la variance asymptotique de  $\hat{c\theta}$  et où les  $m_i$  sont les trajectoires correspondant aux maxima. Il reste, bien sûr, à discuter le choix de  $t$  et  $N$ . Si on prend  $N = 25000$ , on a une précision, au seuil de confiance de 95% pour  $\frac{\sigma_{asympt}}{\sqrt{N}}$  de l'ordre de 5%. Le choix de  $t$  est relativement délicat. En effet, si  $t$  n'est pas assez grand, la loi des maxima n'a pas le temps de converger vers sa limite et l'estimation est forcément biaisée. En outre, il n'est pas non plus possible d'obtenir un intervalle de confiance de l'erreur correspondant. A l'opposé, si  $t$  est très grand, alors se pose le problème du temps de calcul. En pratique,  $t = 50000$  semble correspondre à une taille correcte i.e. celle à partir de laquelle les résultats deviennent pratiquement stables. Notons qu'il est possible d'utiliser, à chaque étape, un test d'adéquation à une loi (celui de Kolmogorov Smirnov par exemple) pour vérifier si les lois obtenues empiriquement sont bien celles qui sont attendues. A titre illustratif, on peut calculer les valeurs du paramètre  $c\theta$  sous diverses configurations. Les biais observés sur les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $\hat{c\theta}$  selon les différentes valeurs de la taille de l'échantillon sont présentés dans le tableau suivant :

$t$	$\hat{c\theta}$	$\frac{\sigma_{asympt}}{\sqrt{N}}$
10000	6,12	0,062
30000	6,39	0,064
50000	6,50	0,046

On constate que la valeur estimée du paramètre  $\hat{c\theta}$  par la méthode du maximum de vraisemblance varie sensiblement avec  $t$  : elle croît lorsque la taille de l'échantillon augmente. A distance finie, le paramètre est donc sous-estimé. Par ailleurs, plus  $a_1$  est petit, plus  $c\theta$  est difficile à estimer (erreur d'estimation plus forte, voir tableau). En outre, la valeur de  $c\theta$  croît fortement lorsque  $a_1$  décroît. Par ailleurs,  $c\theta$  est légèrement asymétrique par rapport à  $\alpha$  (voir tableau ci-dessous).

$\alpha / a_1$	0,4	0,8	1,5
-0,3	7,41 (0,05)	0,55 (0,004)	0,14 (0,001)
0	23,5 (0,17)	0,72 (0,005)	0,15 (0,001)
0,3	6,5 (0,05)	0,50 (0,003)	0,13 (0,001)

Les chiffres entre parenthèses représentent les écart-types des paramètres estimés.

– Importance du bruit.

Les remarques précédentes concernant l'estimation des paramètres ont été faites à partir de simulations obtenues en supposant que les  $(\varepsilon_t)$  suivent une loi Gaussienne standard. Que deviennent ces résultats si on change la loi des  $(\varepsilon_t)$ ? Les hypothèses du théorème de Borkovec imposent que la densité du bruit soit continue et symétrique sur  $R$ . Sous les mêmes hypothèses (continuité et symétrie de la densité), mais avec des lois autres que la Gaussienne, on obtient naturellement des résultats similaires. Nous avons testé la robustesse du théorème par rapport aux bruits ne vérifiant pas les hypothèses précédentes : empiriquement, de manière assez surprenante, les résultats de Borkovec se sont révélés robustes. En particulier, les résultats sont probants pour la loi de Student à deux degrés de liberté (qui n'admet pas de moment d'ordre deux), la loi uniforme centrée (la densité n'est pas strictement positive sur  $R$ , autre cas non prévu par Borkovec), un mélange de gaussiennes

(densité non centrée).<sup>2</sup>

Les remarques concernant l'estimation des paramètres caractérisant la loi de Fréchet des maxima pour le processus  $AR(1) + ARCH(1)$  invitent à une grande prudence, notamment, si on souhaite utiliser les résultats pour des mesures de risque. En effet les séries observées (cours des actions ou plus généralement prix d'actifs financiers) sont, en général, disponibles sur des périodes relativement courtes alors que les résultats ne sont établis que sous des conditions asymptotiques. Les conditions d'application des résultats théoriques à distance finie ne sont donc pas "optimales".

### 2.3.4 Les processus à volatilité stochastique ( $SV$ ).

– Processus  $SV$  et valeurs extrêmes.

Ils ont été introduits par Clark (1973) mais ils sont surtout connus sous la version de Taylor (1986). Ils permettent de supposer que la variance d'une suite  $X_t$  de v.a. est engendrée par un processus stochastique. Ils s'inscrivent dans une démarche alternative par rapport à celle des processus  $ARCH$  dans lesquels la variance conditionnelle n'est pas directement engendrée par un processus stochastique. Par ailleurs, on montre que les processus  $SV$  peuvent être obtenus à partir d'une discrétisation de processus de diffusion traditionnellement utilisés en finance. De ce point de vue, ils sont aussi intéressants à étudier que les processus  $ARCH$  (voir Shephard, 1996 et Guégan, 2000 pour une comparaison des propriétés des processus  $ARCH$  et  $SV$ ). Toutefois, ces derniers modèles sont plus "populaires" et ont fait l'objet d'innombrables applications en finance appliquée. Comme pour les processus  $ARCH$ , il s'agit d'indiquer les conditions sous lesquelles la distribution des valeurs extrêmes tirées de processus  $SV$  converge vers une loi non dégénérée. Les principaux résultats ont été publiés récemment par Breidt et Davis (1998), les seuls, à notre connaissance, ayant abordé l'analyse du comportement des extrêmes sous cet angle. Leur démarche se situe globalement dans la lignée de celle présentée pour les processus  $ARCH$ . Précisons le modèle considéré par les auteurs.

On dit qu'un processus  $(Y_t)$  est un processus  $SV$  s'il est défini par les

---

<sup>2</sup>Ces résultats sont, en partie, tirés d'une étude réalisée, sous notre responsabilité, dans le cadre d'un groupe de travail de l'ENSAE, au cours de l'année 1999-2000 (voir Faucon, Jungers, Lecanon et Rigou, 2000).

relations suivantes :

$$Y_t = \exp(\alpha_t/2)\eta_t,$$

où

$$\alpha_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j}. \quad (19)$$

Les processus  $(\eta_t)$  et  $(\varepsilon_t)$  sont des suites de v.a. i.i.d. suivant, respectivement,  $N(0,1)$  et  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , indépendantes entre elles, telles que  $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 < \infty$ . On note  $\sigma_\alpha^2$ , la variance du processus  $(\alpha_t)$ ,

$$\sigma_\alpha^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 \sigma_\varepsilon^2.$$

Rappelons que, dans son modèle initial, Taylor (1986) avait proposé pour  $(\alpha_t)$  un processus autorégressif d'ordre 1. Considérons la transformation suivante du processus  $(Y_t)$  :

$$X_t = \log Y_t^2 = \alpha_t + \log \eta_t^2.$$

Le processus  $(X_t)$  est donc la somme d'un processus linéaire Gaussien et d'un bruit qui est un logarithme du carré d'une normale, soit un  $\log \chi_1^2$ . On peut alors déterminer la fonction génératrice des moments (dépendant d'un paramètre, ici  $\lambda$ ) de ce dernier processus et en déduire celle correspondant à  $X_t$ , notée  $C(\lambda)$ .

Soient  $m(\lambda)$  et  $S^2(\lambda)$ , respectivement, les dérivées de premier et second ordres de  $\log C(\lambda)$ <sup>3</sup>. Soit  $F$  la distribution du processus  $(X_t)$ . Breidt et Davis (1998) ont montré que :

$$1 - F(x) = P(X_t > x) \sim \frac{\exp\left(-xm^{-1}(x)\right)C\left(m^{-1}(x)\right)}{m^{-1}(x)S\left(m^{-1}(x)\right)(2\pi)^{\frac{1}{2}}}$$

---

3

$$\log C(\lambda) = \lambda^2 \frac{\sigma_\alpha^2}{2} + \lambda \log 2 + \log \Gamma\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) - \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda^2 \frac{\sigma_\alpha^2}{2} + \lambda \log \lambda + \lambda(\log 2 - 1) + \frac{\log 2}{2} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$m(\lambda) = \frac{d}{dx} \log C(\lambda)$$

$$S^2 = \frac{d^2}{d\lambda^2} \log C(\lambda)$$

$$\log\left(m^{-1}(x)\right) = \frac{\log x}{\sigma_\alpha^2} - \frac{\log x}{x} - \frac{k}{x} + O\left(\frac{\log x}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma_\alpha}{\pi^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_\alpha^2} + x \frac{\log x}{\sigma_\alpha^2} + \frac{(k-1)x}{\sigma_\alpha^2} - \frac{(k+\sigma_\alpha^2)}{\sigma_\alpha^2} \log x - \frac{\log^2 x}{2\sigma_\alpha^2} - \frac{k^2}{2\sigma_\alpha^2} + O\left(\frac{\log^2 x}{x}\right)\right)$$

où  $k = \log\left(\frac{2}{\sigma_\alpha^2}\right)$  lorsque  $x$  tend vers l'infini. On a alors le résultat suivant :

**Théorème :** Soit  $(X_t)$ , le processus défini pour tout  $t$  par  $X_t = \log Y_t^2$  où  $(Y_t)$  vérifie l'équation (19) et soit  $\rho(\cdot)$  la fonction d'autocorrélation du processus  $\alpha_t$ . Supposons que  $\rho(h)\log(h)$  tende vers 0 lorsque  $h$  tend vers  $\infty$ . Alors :

-  $M_t = \text{Max}_{1 \leq \tau \leq t}(X_\tau)$  a une distribution de type I, i.e.

$$\exists a_t \text{ et } b_t \text{ tels que } P[a_t(M_t - b_t) \leq x] \rightarrow \exp(-e^{-x}), \quad t \rightarrow \infty,$$

où  $a_t$  est défini par  $a_t = \sigma_\alpha^{-1}(2 \ln t)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\sigma_\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} d_t$  ( $d_t = (\ln t)^{\frac{1}{2}}$ ) et  $b_t$  est solution de  $\ln t + \ln(1 - F(b_t)) = \sigma(1)$  et est égal à :

$$b_t = c_1 d_t + c_2 \ln d_t + c_3 + c_4 \frac{\ln d_t}{d_t} + \frac{c_5}{d_t}$$

avec  $c_1 = (2\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \sigma_\alpha^2 - 1$ ,  $c_4 = -\frac{\sigma_\alpha}{\sqrt{2}}$  et  $c_5 = -\frac{1}{2(2\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \sigma_\alpha^2 \ln(2\pi)\right)$ .

Ce théorème est le cœur du second résultat fondamental de Breidt et Davis (1998). Comme pour le processus *ARCH*, on connaît la distribution limite d'une transformée du processus *SV*. On retrouve l'une des trois distributions limite traditionnelles.  $X_t$  appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel. Toutefois, le théorème ne s'applique pas qu'au processus stationnaire mais couvre une classe assez large de processus  $\alpha_t$ . En outre, sous certaines conditions, on obtient le résultat suivant comme application du théorème précédent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\text{Max}_{1 \leq \tau \leq t}(Y_\tau) \leq y) = \exp(-e^{-\frac{y}{2}}).$$

On peut donc montrer que la série des maxima d'un processus *SV* appartient lui aussi au domaine d'attraction de la loi de Gumbel. Par ailleurs, le paramètre d'échelle  $a_t$  est le même que celui correspondant au cas de v.a. i.i.d. Gaussiennes. Selon ces deux auteurs, l'hypothèse " $\rho(h)\log(h)$  tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers  $\infty$ ", n'est pas contraignante pour les processus traditionnellement retenus pour décrire  $\alpha_t$ .

On constate donc à partir de cette revue de littérature que les résultats théoriques concernant le comportement des maxima d'une série issue d'un processus, linéaire ou non linéaire, sont prometteurs et laissent beaucoup de champ à la recherche. Ils ne peuvent pas pour l'instant toujours répondre aux problèmes qui se posent quand on veut connaître la loi de ces maxima pour des séries réelles pour lesquelles on a ajusté de manière consistante tel ou tel type de modèle. Nous allons aborder ce problème en partie dans la suite. Nous rappelons tout d'abord les méthodes permettant d'estimer les paramètres et le contexte dans lequel les résultats sont obtenus.

### 3 Procédures d'estimation des paramètres des lois extrêmes

Dans ce paragraphe nous nous intéressons aux différentes méthodes d'estimation des paramètres intervenant dans les distributions extrêmes présentées précédemment.

#### 3.1 Méthode du maximum de vraisemblance

Considérons à nouveau la distribution générale des extrêmes des maxima dont l'expression analytique est donnée par le système suivant :

$$G(x; \mu, \sigma, \alpha) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \alpha\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right) & \alpha \neq 0, 1 + \alpha\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0 \\ \exp\left(-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right) & \alpha = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Pour un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de loi  $F$ , on peut calculer la vraisemblance et en déduire les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres. Cette approche s'avère assez complexe. L'estimateur du maximum de vraisemblance conduit à un estimateur non biaisé, asymptotiquement normal (Prescott et Walden, 1980, 1983, Tiago de Oliveira, 1980, Smith, 1985, Hougaard, 1986 ou Smith, 1987). Par ailleurs, la variance asymptotique est égale à la borne de Fréchet - Darmois - Cramer - Rao. Le système d'équations non linéaires est donné par exemple par Tiago de Oliveira (1980) et Smith (1985).

Le paramètre le plus intéressant est le paramètre de forme  $\alpha$  car par des transformations simples, on peut éliminer les deux autres. En effet, après

transformation des arguments, pour  $\alpha \neq 0$ , la distribution  $G(x; \mu, \sigma, \alpha)$  peut être écrite sous la forme :

$$G_\alpha(x) = \exp(-(1 + \alpha x)^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad \alpha \neq 0, \quad 1 + \alpha x > 0.$$

Cette expression est donc encore une forme générale comprenant des lois traditionnelles (pour  $\alpha \neq 0$ ,  $\frac{x-\mu}{\sigma}$  est remplacée par  $x$  dans  $G(x; \mu, \sigma, \alpha)$ ). Ici, nous allons nous intéresser uniquement à  $\alpha$ .

### 3.2 L'estimateur de Pickands

Il est fondé sur le calcul des quantiles. Cet estimateur a été introduit par Pickands (1975) et revisité par Drees (1995 ou 1998) d'une part, Dekkers et al. (1989) d'autre part, qui en ont établi sa faible consistance. Il est défini de la manière suivante. Soient  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  une suite de v.a. i.i.d. de loi jointe  $F$  et de loi limite du maximum,  $G_\alpha(x)$ . Désignons par  $(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$ , la suite ordonnée dans l'ordre croissant des composantes de la suite initiale  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Notons  $\hat{\alpha}_n$  l'estimateur de Pickands de  $\alpha$ . Alors, étant donnée une suite  $m = m(n)$ , on a :

$$\hat{\alpha}_n = -\frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{X_{(n-m+1)} - X_{(n-2m+1)}}{X_{(n-2m+1)} - X_{(n-4m+1)}}\right).$$

Les propriétés asymptotiques de cet estimateur sont les suivantes :

**Théorème :**

(i) - *Sous les hypothèses précédentes, si  $m(n) \rightarrow \infty$  et  $\frac{m(n)}{n} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors :*

$$\hat{\alpha}_n \rightarrow \alpha, \text{ en probabilité } n \rightarrow \infty.$$

(ii) - *Sous les mêmes hypothèses, si  $\frac{m(n)}{n} \rightarrow 0$  et  $\frac{m(n)}{\log \log n} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , alors :*

$$\hat{\alpha}_n \rightarrow \alpha, \text{ p.s. } n \rightarrow \infty.$$

■.

Sous des hypothèses affectant la fonction  $F$ , que nous précisons ci-dessous, l'estimateur de Pickands admet, asymptotiquement, une distribution normale. Posons :

$H_0$  : Supposons que  $U(x) = (\frac{1}{1-F(x)})^{-1}$  aie une dérivée positive et qu'il existe une fonction  $a$  positive telle que, pour  $x > 0$ , et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(tx)^{1-\alpha} U'(tx) - t^{1-\alpha} U'(t)}{a(t)} = (+/-) \log x.$$



**Théorème :** *Pour des v.a. i.i.d. dont la fonction  $F$  vérifie l'hypothèse  $H_0$ , si  $m = m(n) \rightarrow \infty$ , avec  $m(n) = o(\frac{n}{g(n)})$  où  $g(t) = t^{3-2\alpha}(U'(t)/a(t))^2$ ,  $n \rightarrow \infty$ , alors*

$$\sqrt{m}[\hat{\alpha}_n - \alpha] \rightarrow N(0, \Gamma), \quad n \rightarrow \infty$$

où

$$\Gamma = \alpha^2(2^{2\alpha+1} + 1)/(2(2^\alpha - 1)\log 2)^2.$$

■.

**Remarques :**

- la normalité asymptotique de l'estimateur  $\hat{\alpha}_n$  est obtenue aussi pour des suites  $m(n)$  telles que  $m(n) \rightarrow \infty$  avec  $m(n) = o(\log^2 n)$ ;
- le théorème est encore vrai pour une distribution de type Cauchy;
- pour les propriétés asymptotiques de l'estimateur de Pickands nous renvoyons à Drees (1995 et 1998).

L'estimateur de Pickands, fondé sur l'utilisation des quantiles, est général dans sa conception et peut être utilisé dans l'estimation des paramètres des trois distributions extrêmes. Une généralisation de l'estimateur de Pickands a été introduit par Dekkers, Einmahl et de Haan (1989 a et b). Un estimateur proche de celui-ci a été proposé par ces auteurs. Sous des conditions de régularité de la loi  $F$ , ils obtiennent la normalité asymptotique de l'estimateur.

### 3.3 Estimateur de Hill

Cet estimateur est construit de la manière suivante : On considère une suite  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de v.a. i.i.d. de loi jointe  $F$  telle que :  $1 - F(x) = x^{-\alpha}L(x)$ ,  $x > 0$ , avec  $L(x)$  une fonction qui décroît lentement vers zéro. Alors si on note  $\hat{H}_k$  l'estimateur de Hill (Hill, 1975) de  $\alpha^{-1}$ , il a l'expression suivante :

$$\hat{H}_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log X_{(n-j+1)} - \log X_{(n-k)},$$

pour  $1 \leq k \leq n$ , où  $k = k(n) \rightarrow \infty$ . Cet estimateur, le plus utilisé en théorie des valeurs extrêmes, a été largement étudié. Les résultats de consistance sont établis pour  $\alpha > 0$ . Sa faible consistance a été établie par Mason (1982), sa forte consistance a été établie en particulier par Hall et Welsh (1984) et Deheuvels, Haeusler et Mason (1988) qui pour une suite bien choisie de  $k_n$  donnent la vitesse de convergence optimale. Resnick et Starica (1995)

ont démontré la consistance de l'estimateur de Hill dans le cas de variables dépendantes. On a aussi défini les conditions sous lesquelles l'hypothèse de normalité asymptotique de cet estimateur est vérifiée (Hall (1982), Czorgo, Mason (1985), Athreya, Lahiri, Wu (1998), Davis, Resnick (1988b)), à savoir :

$$\sqrt{k_n}(\hat{H}_k - \alpha^{-1}) \sim N(A, \Lambda),$$

où  $\Lambda = \alpha^{-2}$  si  $k_n \rightarrow \infty$  et  $\frac{k_n}{n} \rightarrow 0$  et où la constante  $A$  peut être calculée explicitement à partir de la distribution  $F$  (Haeusler et Teugel, 1985, Deheuvels, Haeusler et Mason, 1988).

En raison des hypothèses imposées pour obtenir un bon comportement asymptotique, l'estimateur de Hill n'est en fait efficace que pour les lois extrêmes de Fréchet. C'est en cela que réside la grande différence entre les estimateurs de Pickands et de Hill, même si du point de vue de leur construction, leur explication "intuitive" est sensiblement la même. Nous renvoyons aussi à Haeusler et Teugel (1985), Deheuvels, Haeusler et Mason (1988) et à Bacro, et Brito (1998) qui ont proposé récemment un estimateur plus général que l'estimateur de Hill avec les mêmes propriétés asymptotiques. Une approche fonctionnelle pour étudier les propriétés de l'estimateur de Hill est considérée par Dekkers et de Hann (1989). Il montre en particulier que les propriétés de l'estimateur du paramètre  $\alpha$  quand celui-ci est négatif sont diminuées si dans la distribution  $G_\alpha(\cdot)$  on introduit un paramètre de localisation. Ils ont également proposé une généralisation des résultats de Hill.

### 3.4 Approche au second ordre

Nous considérons des v.a. i.i.d. de loi  $F$  et un développement au second ordre de la distribution de cette loi, soit :

$$F(x) \sim 1 - ax^{-\alpha}[1 + bx^{-\beta}], \quad (20)$$

où  $a > 0, \alpha > 0, \beta > 0, b \in \mathbb{R}$ . Si  $\beta = 0$ , on retrouve l'expression classique de la distribution des extrêmes :  $F(x) \sim 1 - ax^{-\alpha}[1 + \log x]$ . Si  $\alpha = \beta$  par exemple, on obtient les lois de type II. La relation (20) permet, entre autres, de prendre en compte les lois t-Student pour  $\beta = 2$ ,  $\alpha$  correspond alors au nombre de degrés de liberté de la loi de Student. Si  $F(x)$  est définie par (20), alors le paramètre  $\alpha$  peut être estimé par une procédure proposée par Dekkers, Einmahl et de Haan (1989), soit :

$$\frac{1}{\hat{\alpha}} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \log \frac{X_{(i)}}{X_{(m)}},$$

tandis que le paramètre  $\beta$  est construit à partir d'une procédure fondée sur la méthode des moments :

$$\hat{\beta} = \hat{\alpha}(\sqrt{\Delta} - 1),$$

avec

$$\Delta = \frac{M^{(1)} - \frac{M^{(2)}}{2M^{(1)}}}{\frac{M^{(3)}}{3M^{(2)}} - \frac{M^{(4)}}{4M^{(3)}}},$$

où les moments empiriques d'ordre  $j$  sont définis par :

$$M^{(j)} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \left[ \log \frac{X_{(i)}}{X_{(m)}} \right]^j.$$

Les propriétés de ces estimateurs sont étudiées dans Dekkers, Einmahl et de Haan (1989) .

### 3.5 Estimation de l'index extrême

Une estimation empirique du paramètre  $\theta$  est la suivante :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \frac{\log(1 - K_u/m)}{\log(1 - S_u/mn)},$$

où  $S_u$  est le nombre de points au dessus du seuil  $u$  et  $K_u$  le nombre de blocs dans lesquels le seuil est dépassé, et  $m$  est la taille des blocs. L'étude des propriétés d'un tel estimateur reste à faire.

## 4 Valeurs extrêmes et processus multivariés

Les divers domaines d'application de la théorie des valeurs extrêmes sont aussi marqués par des phénomènes de dépendance ou des mécanismes de contagion. C'est en particulier le cas des marchés financiers. En effet, ce n'est pas difficile (même si des problèmes de mesure peuvent se poser) de mettre en exergue l'existence de liaisons plus ou moins fortes entre les marchés d'une place financière donnée ou entre le même type de marchés sur des places différentes. Dans le premier cas, on peut citer comme exemple l'existence de liaison entre les marchés actions et obligataires de la place de Paris. Dans le second cas, supposer que les profils d'évolution des marchés actions des places de Paris et de Francfort sont parallèles ou qu'ils sont orientés par

celui de la place de New York. Dès lors, une analyse séparée des comportements des extrêmes par exemple manquerait de réalisme voire de pertinence car la fixation des prix des actifs financiers apparaît à la fois simultanée et imbriquée. Le mode d'analyse retenu jusque-là n'est donc pas toujours complètement adapté à la réalité économique ou financière.

Toutefois, si la littérature relative au cas univarié est abondante et diversifiée, avec des résultats théoriques confirmés par des applications, celle correspondant au cas multivarié est un peu plus pauvre mais elle est en pleine expansion (Tiago de Oliveira, 1973, de Haan et Resnick, 1977, Galambos, 1978, Marshall et Olkin, 1983, Resnick, 1987, Coles et Tawn, 1991 et 1994, Balkema, Pancheva, 1996, Ledford et Tawn, 1997, Perfekt, 1997, de Haan et Ronde, 1998, Anderson, Nadarajah et Tawn (1998) ou encore Starica, 1999). Si, comme on le verra plus loin, certains résultats sont à l'évidence une généralisation de ceux exposés ci-dessus et portant sur le cas univarié (exemple du théorème de Gnedenko, 1943, par exemple), d'autres sont spécifiques aux cas multivariés. Ces derniers sont globalement complexes. En effet, comme d'habitude (exemple des processus *ARCH*), le passage d'un cadre univarié à un cadre multivarié engendre une série de problèmes tant au niveau théorique qu'au niveau technique ou empirique. De ce point de vue, le rapprochement le plus naturel est celui qu'on peut établir entre l'analyse des processus *ARCH* et celle des valeurs extrêmes multivariés. En effet, dans les deux cas, mis à part le problème de définition d'une relation d'ordre dans un cadre multivarié sur lequel on reviendra (Anderson, Nadarajah et Tawn, 1998 ou, Ledford et Tawn, 1998), on peut être confronté à un problème d'existence de solutions stationnaires ou à celui d'une identification des paramètres. D'une manière générale, dans un cadre multivarié en raison des interactions entre les différentes variables expliquées, les relations de comportement sont souvent plus compliquées et fortement non-linéaires.

Dans le cas des processus *ARCH* par exemple, Bollerslev (1990) a proposé une solution qui consiste à supposer que les corrélations conditionnelles sont constantes. Bien qu'un peu réductrice, cette hypothèse est très utile pour les applications. En outre, elle sera retenue, comme on le verra plus tard, pour l'analyse du comportement des valeurs extrêmes dans un cadre multivarié. Par ailleurs, comme on l'a déjà signalé, l'intérêt de l'étude des valeurs extrêmes dans un cadre multivarié réside dans la prise en compte des relations d'interdépendance entre les différentes composantes du processus multivarié. Or l'analyse des valeurs extrêmes des processus univariés montre que l'hypothèse de dépendance, bien que très intéressante et réaliste, est relativement compliquée à mettre en place. En outre, on ne dispose de résultats théoriques

robustes (mais difficilement applicables) que pour certaines formes particulières de dépendance.

Le passage au cadre multivarié impose un double niveau de dépendance : celui des observations pour chacune des composantes du processus multivarié et celui défini entre les  $d$  composantes du processus (on suppose ici que  $X_t \in R^d$ ). Dans le cas des marchés actions par exemple, les deux niveaux de dépendance peuvent être exploités de la manière suivante : on retient l'existence d'une liaison entre les observations de chaque marché considéré comme une entité à part entière ; on valide l'existence d'une relation inter-marchés justifiant ainsi la nécessité d'imposer un cadre multivarié d'analyse. La prise en compte de telles hypothèses ne répond pas seulement à des exigences théoriques mais est indispensable pour une bonne appréhension de la réalité ou encore à une utilisation appropriée des règles de décision fondée sur l'existence d'évènements rares. La gestion des risques peut être retenue comme exemple dans ce dernier cas.

L'existence d'inter-dépendance entre différents marchés est un premier exemple de la difficulté de l'analyse dans un cadre multivarié. On aurait pu fonder notre exemple sur l'analyse d'autres propriétés (non stationnarité, non-linéarité, ...) des processus. Compte tenu du caractère préliminaire des résultats portant sur certains thèmes (même si des contributions importantes y sont consacrées), nous n'en présenterons que les grandes lignes. Ces thèmes, volontairement mis de côté, pourraient, ultérieurement, faire l'objet d'un approfondissement. On pourrait citer comme exemple ici, les travaux récents de Starica (1999) sur l'analyse des processus multivariés de valeurs extrêmes sous l'hypothèse de constance des corrélations conditionnelles. Il s'agit donc d'abord pour nous de faire le point sur le corpus théorique des processus multivariés des valeurs extrêmes, généralement admis et validé par des études, notamment empiriques.

## 4.1 Définitions et propriétés générales

Analyser le comportement des rendements dépassant un seuil donné sur chacune des composantes d'un ensemble des marchés n'est pas dénué de sens, tout au moins d'un point de vue pratique. Comme l'étude des variables dépassant un seuil fixé peut être rapprochée de celle portant sur les maxima, on peut transposer facilement le concept précédent au cas des processus multivariés de valeurs extrêmes.

**Définition :** *Pour  $n \geq 1$ , considérons une suite de vecteurs réels de dimen-*

sion d notée  $\{X_n\}$  i.e.

$$\left(X_n \in \mathbb{R}^d, X_n = \left(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(d)}\right)\right),$$

indépendantes et identiquement distribués. La variable  $M_n$ , maximum des  $X_n$ ,  $MaxX_n$  (resp.  $m_n$ , minimum des  $X_n$ ,  $MinX_n$ ) est égale à :

$$M_n = \left(M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(d)}\right) = \left(Max_{1 \leq j \leq n}(X_j^{(1)}), \dots, Max_{1 \leq j \leq n}(X_j^{(d)})\right)$$

(resp.

$$m_n = \left(m_n^{(1)}, \dots, m_n^{(d)}\right) = \left(Min_{1 \leq j \leq n}(X_j^{(1)}), \dots, Min_{1 \leq j \leq n}(X_j^{(d)})\right).$$

Ainsi, dans le cas d'une analyse entre  $d$  marchés financiers par exemple, le maximum de cette classe de marchés est déterminé par les maxima observés sur chaque marché. Cette définition semble contraignante par certains côtés mais c'est celle qui semble la plus facilement interprétable, notamment lorsqu'il faudrait définir les conditions d'existence de la loi limite correspondant à  $M_n$ . On peut maintenant déterminer les conditions (C.N.S. si possibles) d'existence de la loi limite des  $M_n$  connaissant la distribution des  $X_n$ . En clair, tout comme pour les processus univariés, il s'agit avant tout de décrire les caractéristiques du domaine d'attraction des maxima d'un processus vectoriel. Une définition précise des conditions d'appartenance à un domaine d'attraction sera ensuite, naturellement, introduite.

**Définitions :** Soient  $a_n$  et  $b_n$  deux vecteurs de paramètres de dimension  $d$  ( $a_n \in \mathbb{R}^d, b_n \in \mathbb{R}^d$ ) et  $X_n$  une suite de vecteurs réels de dimension  $d$  ( $X_n \in \mathbb{R}^d$ ). (On supposera par la suite que les  $X_n$  sont i.i.d.). Par définition :

$$a_n X_n + b_n = \left(a_n^{(1)} X_n^{(1)} + b_n^{(1)}, \dots, a_n^{(d)} X_n^{(d)} + b_n^{(d)}\right);$$

$$a_n^{-1} X_n = \left(a_n^{(1)-1} X_n^{(1)}, \dots, a_n^{(d)-1} X_n^{(d)}\right).$$

Si  $Y_n$  désigne aussi une suite de vecteurs réels alors par définition :

$$X_n \leq Y_n \iff \left(X_n^{(1)} \leq Y_n^{(1)}, \dots, X_n^{(d)} \leq Y_n^{(d)}\right).$$

Si  $M_n$  représente la série des maxima définie plus haut pour une suite donnée de vecteurs i.i.d.  $X_n$ , et  $F$  la distribution des  $X_n$ , s'il existe  $a_n$  et  $b_n$ , ( $a_n \in \mathbb{R}_+^d$ ) et ( $b_n \in \mathbb{R}^d$ ) et  $u \in \mathbb{R}^d$  tels que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq u\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a_n^{(i)-1}(M_n^{(i)} - b_n^{(i)}) \leq u^{(i)}, 1 \leq i \leq d\right) \\ &= G(u) \end{aligned}$$

(pour une distribution non dégénérée  $G(\cdot)$  définie sur  $\mathbb{R}^d$ ), on dit que  $F$  appartient au domaine (ou au max domaine) d'attraction de  $G$  ( $F \in D(G)$  ou  $F \in D_{max}(G)$ ).

Une fois admise la définition de la relation d'ordre sur  $\mathbb{R}^d$ , les caractéristiques du domaine d'attraction des processus univariés et multivariés sont comparables. On obtient une définition similaire pour le domaine de survie des minima. Sibuya (1960) a publié les premiers résultats portant sur les C.N.S. pour qu'une distribution  $F$  appartienne au domaine d'attraction d'une loi limite donnée. Ces résultats ne s'appliquent cependant qu'au cas bivarié. Leur généralisation n'est survenue que plus tard (Marshall et Oklin, 1983 par exemple) avec une introduction de conditions portant sur les distributions marginales et la loi jointe limite des maxima. On note ici le poids de la définition des  $M_n$  (via les maxima sur chacune des composantes du processus multivarié) dans la détermination du domaine d'attraction. En fait, on cherchera à transposer les résultats obtenus pour le cas univarié sur les composantes du processus multi-dimensionnel en faisant notamment appel aux trois lois limites traditionnelles.

Supposons que  $G$  représente une distribution jointe (ayant  $\mathbb{R}^d$  comme support) de valeurs extrêmes tirées d'une suite de vecteurs  $X_n$ , ( $X_n \in \mathbb{R}^d$ ). Soient  $G_i, i = 1, \dots, d$ , la distribution marginale correspondant à  $G$ , et  $F$  la distribution jointe des  $X_n$ .

**Théorème :** Si  $G_i = \Phi_{\alpha_i}, i = 1, \dots, d$  où  $\Phi_{\alpha_i}$  est une distribution de Fréchet (non forcément identique pour les  $d$  composantes du processus) et si  $\varphi_i(t) = (1 - F_i)^{-1}(1 - F_1)(t), i = 2, \dots, d, t \in \mathbb{R}^d$  alors  $F$  appartient au domaine d'attraction de  $G$ , ( $F \in D_{max}(G)$ ), si et seulement si,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - F(tx_1, \varphi_2(t)x_2, \dots, \varphi_d(t)x_d)\right)}{1 - F_1(t)} \\ = -\log G(x) \end{aligned}$$

pour tout  $x$  telle que  $G(x) > 0$ .

**Théorème :** Si  $G_i = \Psi_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, \dots, d$  où  $\Psi_{\alpha_i}$  est une distribution de Weibull (non forcément identique pour les  $d$  composantes du processus), alors  $F \in D_{max}(G)$ , si et seulement si :

- a)  $\exists x^0 \in \mathbb{R}^d$  telle que  $F(x^0) = 1$  et  $F(x) < 1$ , si  $x \neq x^0$  ;  
b)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 - F(tx_1, \varphi_2(t)x_2, \dots, \varphi_d(t)x_d) + x^0\right)}{1 - F_1(x^0 - t)} = -\log G(x)$$

pour tout  $x$  telle que  $G(x) > 0$  et  $\varphi_i(t) = x^{0(i)} - (1 - F_i)^{-1}(1 - F_1)(t)$ ,  $i = 2, \dots, d$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ .

**Théorème :** Si  $G_i = \Lambda$ ,  $i = 1, \dots, d$ , où  $\Lambda$  est une distribution de Gumbel (de fait ici les lois marginales sont identiques), alors  $F \in D_{max}(G)$ , si et seulement si :

$$\lim_{t \uparrow x_1^0} \frac{\left(1 - F(a(t)x + b(t))\right)}{1 - F_1(t)} = -\log G(x)$$

pour tout  $x$  telle que  $G(x) > 0$  où :

$$x_1^0 = \sup\{t : F_1(t) < 1\};$$

$$a^i = (1 - F_i)^{-1}\left(e^{-1}(1 - F_i(t)) - (1 - F_i(t))^{-1}(1 - F_1(t))\right);$$

$$b^i = (1 - F_i)^{-1}(1 - F_1(t)), i = 1, \dots, d.$$

On peut établir de manière analogue les C.N.S. d'appartenance de  $F$  au domaine de survie des minima.

## 5 Etude empirique

### 5.1 Simulations des densités des lois limites standard

Comme les densités des lois extrêmes sont relativement peu connues, à titre d'exemple, nous nous proposons de fournir quelques représentations de leur forme en fonction de différentes valeurs des paramètres les caractérisant. Nous présentons ainsi les densités des lois de Gumbel, Weibull et Fréchet pour quelques valeurs des paramètres (dans le cas des lois de Weibull et de



Fréchet).<sup>4</sup>

D'un côté, la loi de Fréchet est caractérisée par une asymétrie à droite non fondamentalement remise en cause par les différentes valeurs des paramètres. Toutefois, la forme de la "cloche asymétrique" devient de plus en plus pointue (le maximum atteignant alors des valeurs de plus en plus élevées) lorsque le paramètre se rapproche de 1. Autrement dit, plus le paramètre est faible (proche de 0), plus la loi de Fréchet se rapproche de celle de Gumbel (avec un léger décalage à gauche).

De l'autre côté, la loi de Weibull se distingue par une asymétrie à gauche. Comme pour la loi de Fréchet mais avec des paramètres négatifs, plus on se rapproche de 1 (en valeur absolue), plus la courbe devient pointue, s'écartant ainsi de celle de Gumbel. En revanche, la loi de Weibull se rapproche de celle de Gumbel pour les valeurs du paramètre proche de 0 (avec cette fois-ci un léger décalage à droite).

Les valeurs des paramètres ne remettent donc pas en cause ces caractéristiques générales de ces deux lois limites. En outre, pour les petites valeurs du paramètre (en valeur absolue), à l'asymétrie près (les fonctions de Fréchet atteignent leur maxima avant celle de Gumbel tandis que les fonctions de Weibull l'atteignent après), il semble difficile de distinguer les lois de Fréchet et de Weibull. Par ailleurs, la loi de Gumbel apparaît bien comme un cas limite ou particulier de chacune des deux précédentes lois.

---

<sup>4</sup>Les simulations ont été réalisées avec l'aide de Sophie Ladoucette. Les auteurs l'en remercient.

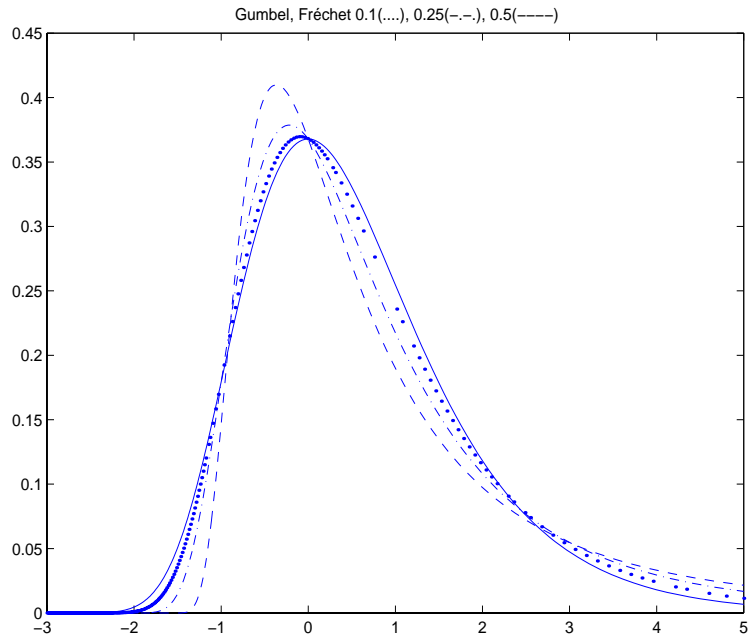


FIG. 1 – Lois de Gumbel et Fréchet de paramètre 0,1 ; 0,25 et 0,50

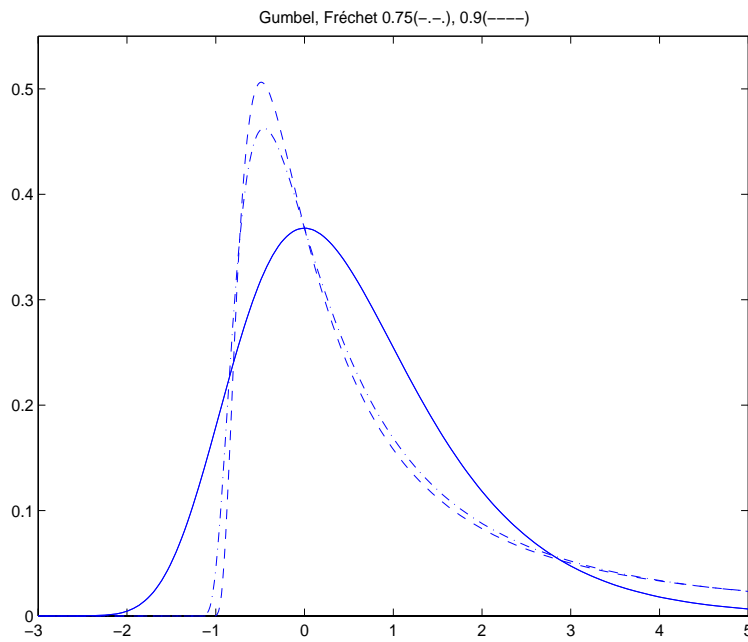


FIG. 2 – Lois de Gumbel et Fréchet de paramètre 0,75 et 0,90

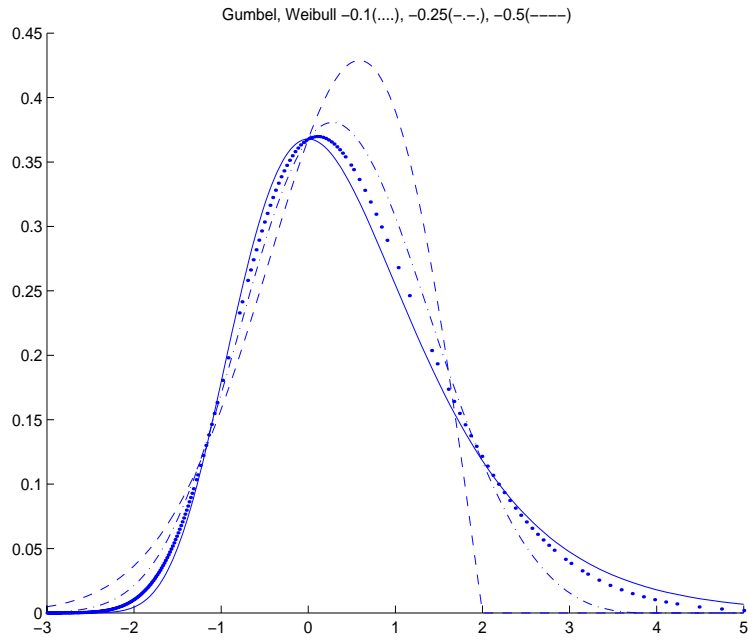


FIG. 3 – Lois de Gumbel et Weibull de paramètre -0,1 ; -0,25 et -0,50

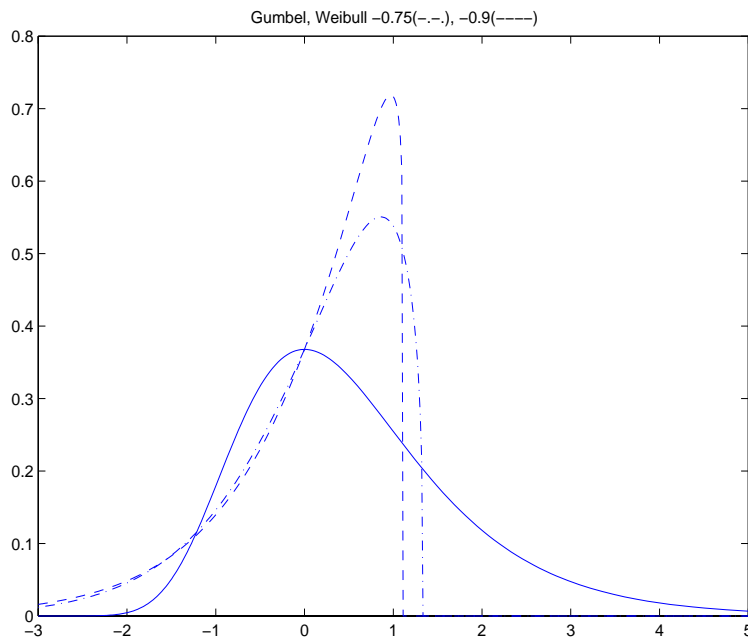


FIG. 4 – Lois de Gumbel et Weibull de paramètre -0,75 et -0,90

## 5.2 Etude empirique des extrêmes de processus linéaires et non linéaires

Nous présentons dans cette section les lois des maxima pour différents processus. Dans l'ensemble des simulations, nous utilisons des échantillons de taille  $n = 40000$  à partir desquels nous construisons des suites de maxima de longueur 1000. Seuls les résultats les plus significatifs sont exposés dans cette section. Cependant, d'autres résultats de simulations (en particulier des graphiques) peuvent être consultés à la fin du document.

Nous commençons cette partie empirique par l'analyse des lois des maxima tirés de processus autorégressifs stationnaires d'ordre 1 ( $AR(1)$ ), simulés à partir d'un bruit Gaussien (figure 5), ou exponentiel (figures 6 et 7) ou uniforme (figure 8). Pour le bruit Gaussien, on retrouve comme loi limite des maxima, une loi de type Gumbel, ceci quelles que soient les valeurs du paramètre du processus ( $AR(1)$ ). Pour la loi exponentielle, plus le paramètre ( $AR(1)$ ) est petit, plus on est proche de la loi Fréchet. Pour la loi normale, le résultat est conforme à celui correspondant au cas indépendant. En revanche, pour la loi exponentielle, les conclusions ne confirment pas les résultats généraux obtenus dans le cas indépendant (où on aurait obtenu comme distribution limite une loi de Gumbel). Pour ce qui concerne le bruit uniforme, on retrouve le phénomène précédent sauf que la loi observée est plutôt proche d'une loi de Weibull. Ces remarques ne sont pas en contradiction avec les résultats généraux concernant les processus  $ARMA$  pour lesquels on sait seulement que la loi des maxima est de type I, II ou III.

Considérons maintenant les résultats des simulations concernant les processus  $ARCH(1)$  simulés à partir d'un bruit Gaussien (figure 9), ou exponentiel (figure 10) ou uniforme (figure 11). D'après les résultats rappelés précédemment (Mikosch et Starica, 1998, voir Partie II), on s'attend à obtenir une loi de type Fréchet. Dans le cas de la loi normale, la distribution de Fréchet est effectivement observée pour de grandes valeurs (proches de 1) du paramètre  $a_1$  correspondant à l'effet  $ARCH$ . En revanche, la loi limite des maxima est moins tassée pour les valeurs de  $a_1$  proches de 0. Dans le cas des  $ARCH$  simulés à partir de bruit exponentiel, on observe un comportement de type Fréchet très tassé autour de 0 pour des valeurs très petites de  $a_1$ . Dans ces deux premiers exemples, les résultats des simulations sont globalement conformes à ceux attendus, même si la forme des lois limites peut être plus ou moins tassée. Si on utilise maintenant un bruit uniforme, on observe un comportement nettement différent pour la distribution des maxima. En effet, si  $a_1 = 0, 1$ , la distribution semble être une loi de Weibull. Dans le cas indé-

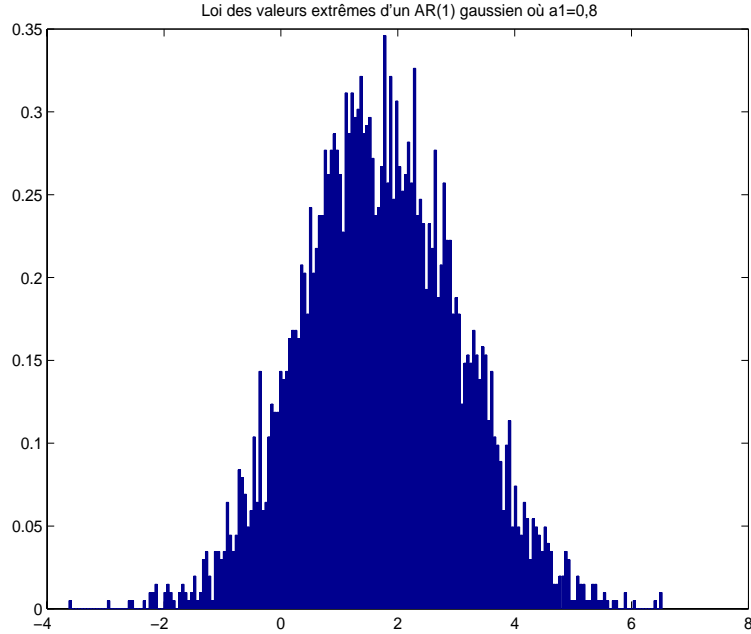


FIG. 5 –  $AR(1)$  avec  $\alpha = 0,8$  sous hyp. d'une distrib. normale

pendant, la loi limite des maxima tirés de séries engendrées sous l'hypothèse d'une distribution uniforme est la loi de Weibull. Le fait d'imposer en plus de la distribution uniforme, l'hypothèse d'un processus  $ARCH$  n'affecte en aucune manière les résultats. D'après nos simulations, la loi limite dépend donc de l'hypothèse retenue pour la simulation du processus  $ARCH(1)$  : pour les lois normale et exponentielle, on retrouve les résultats de Mikosch et Starica (1998) ; pour la loi uniforme, nos simulations ne s'accordent pas avec leurs. Pour les processus  $AR(1)$ - $ARCH(1)$  simulés à partir d'un bruit Gaussien (figures 12, 13 et 14) ou exponentiel (figures 15 et 16) ou uniforme (figures 17, 18, 19 et 20), la distribution limite des maxima est dans la plupart des cas de type Fréchet ce qui confirme dans une large mesure, les conclusions de Borkovec (1999). En effet, dans le cas d'un bruit Gaussien, la distribution de Fréchet est observée pour la loi des maxima, quelle que soit la valeur de  $a_1$  (le paramètre  $AR$ ) dès que  $b_1$  (le paramètre  $ARCH$ ) est assez grand ( $\geq 0,5$ ). Pour les processus  $AR(1)$  –  $ARCH(1)$  simulés à partir de lois exponentielles, la distribution des maxima suit également un comportement de type Fréchet, cette fois-ci, quelles que soient les valeurs prises par les paramètres  $a_1$  et  $b_1$ . Toutefois, cette distribution devient très tassée autour de grandes valeurs de  $b_1$ . Dans le cas de bruit uniforme, les résultats semblent plus contrastés et parfois distincts de ceux de Borkovec. En effet, en fixant  $b_1$  (par exemple

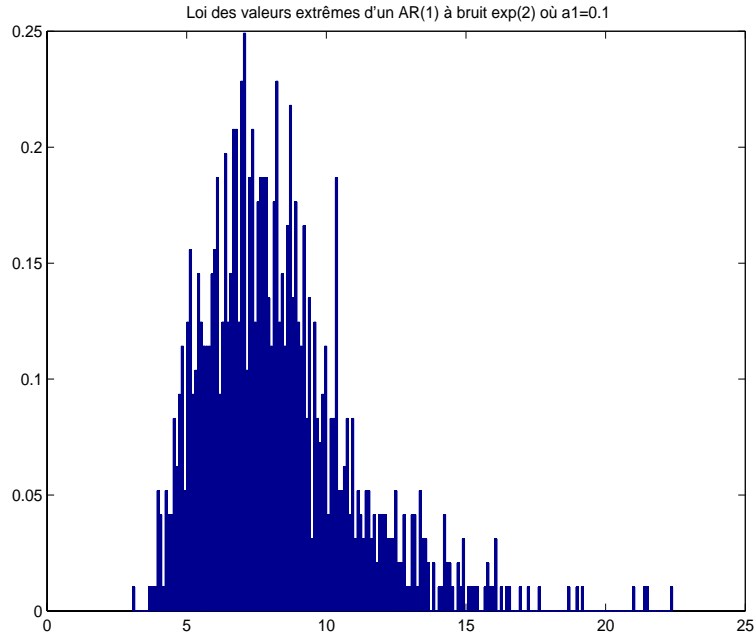


FIG. 6 –  $AR(1)$  avec  $\alpha = 0,1$  sous hyp. d'une distrib. exponentielle

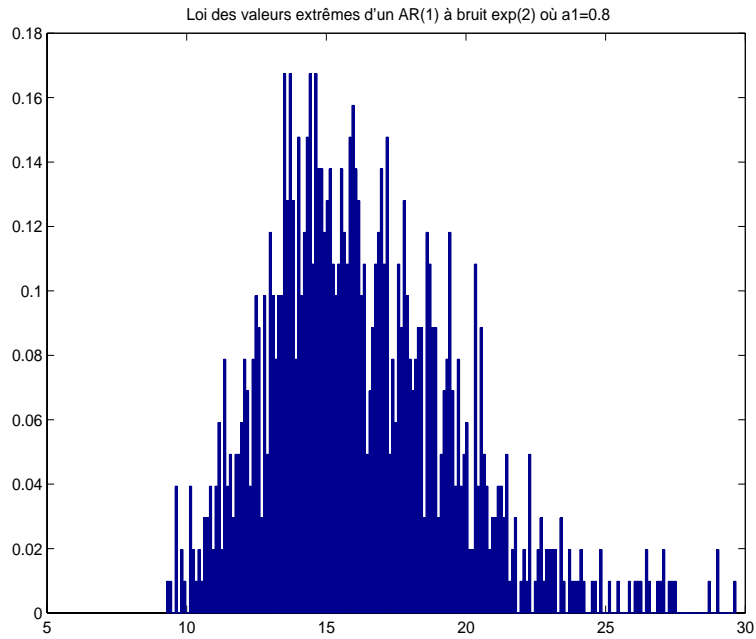


FIG. 7 –  $AR(1)$  avec  $\alpha = 0,8$  sous hyp. d'une distrib. exponentielle

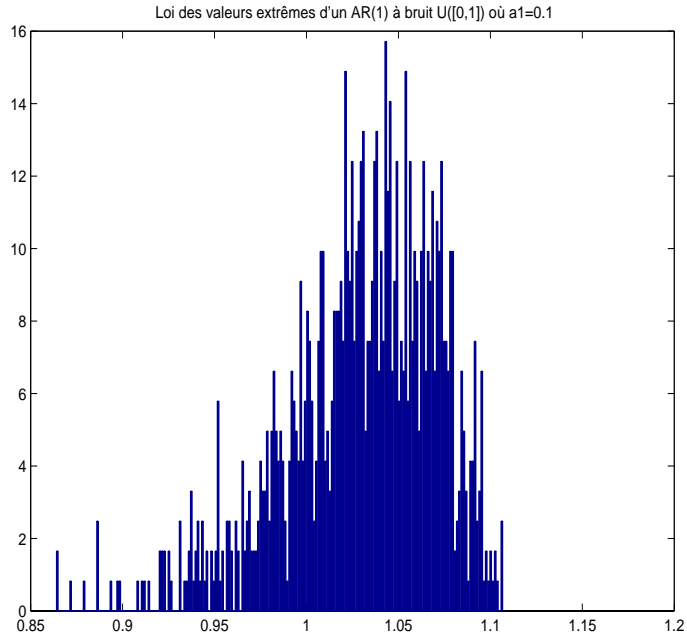


FIG. 8 –  $AR(1)$  avec  $\alpha = 0,1$  sous hyp. d'une distrib. uniforme

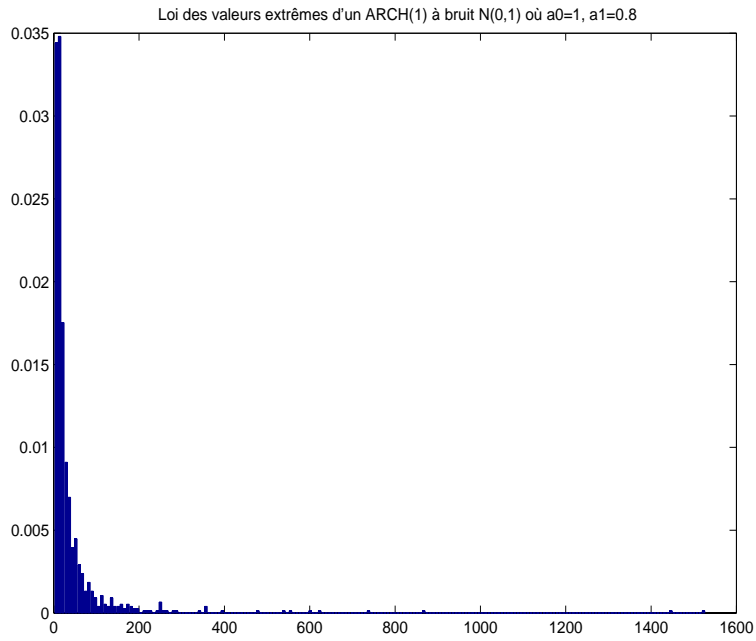


FIG. 9 –  $ARCH(1)$  avec  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0,8$  sous hyp. d'une distrib. normale

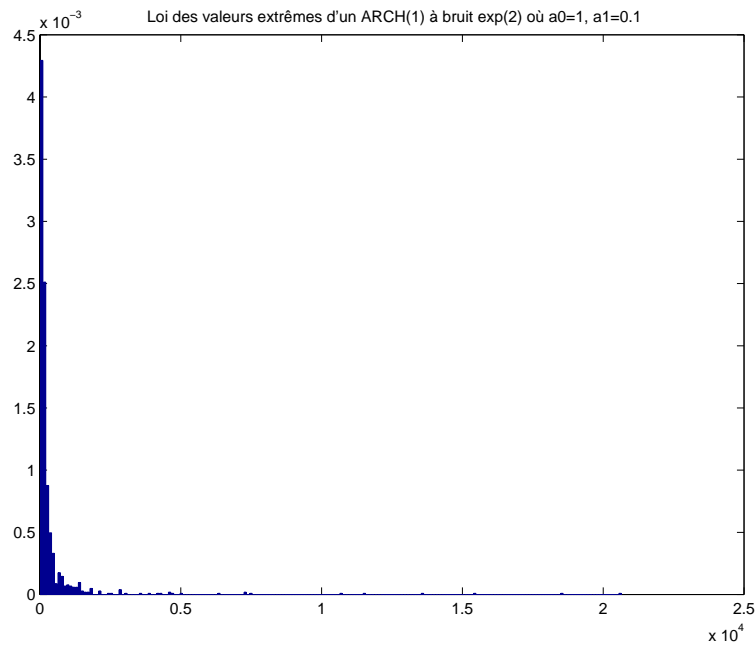


FIG. 10 –  $ARCH(1)$  avec  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, 1$  sous hyp. d'une distrib. exponentielle

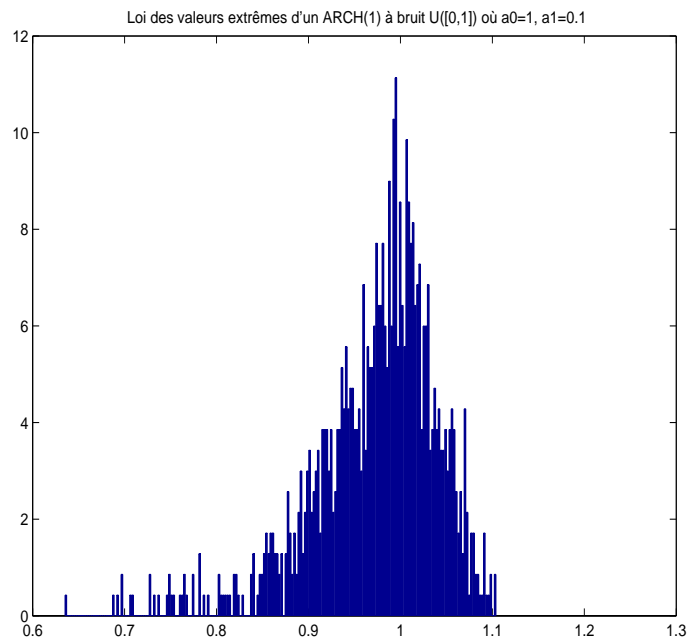


FIG. 11 –  $ARCH(1)$  avec  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, 1$  sous hyp. d'une distrib. uniforme



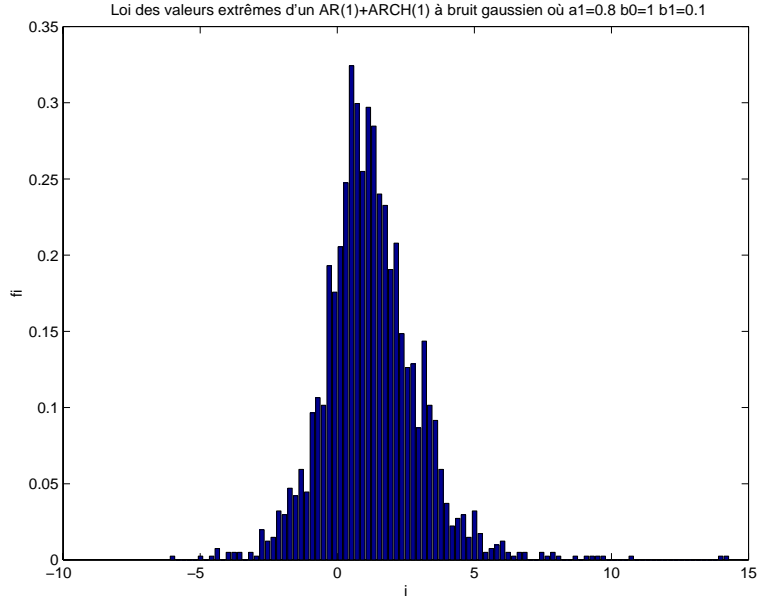


FIG. 12 –  $AR(1) - ARCH(1)$  avec  $a_1 = 0,8$ ,  $b_1 = 0,1$  sous hyp. d’une distrib. normale

égal à 0,1) et en faisant varier  $a_1$  (de 0,1 à 0,8), la distribution, tout en restant dissymétrique, est soit de type Weibull ( $a_1 = 0,1$ ), soit de type Fréchet ( $a_1 = 0,8$ ). Si nous fixons maintenant ( $a_1 = 0,1$ ), en faisant varier à son tour  $b_1$  (de 0,5 à 0,8), le comportement de la loi des maxima semble plus difficile à analyser (entre autres, l’assymétrie est moins nette). Comme pour les maxima tirés de processus  $ARCH$ , les caractéristiques de la loi uniforme semblent l’emporter largement sur celles des processus  $AR(1) - ARCH(1)$  en prédéterminant quasiment la loi limite des maxima.

Dans le cas des processus SV simulés à partir d’un bruit Gaussien (figure 21) ou exponentiel (figure 22) ou uniforme (figure 23), quelles que soient la loi et la valeur de la variance du bruit, on ne constate pas de différence notable dans le comportement des lois des maxima : celles-ci semblent proches d’une loi de Gumbel, conformément aux résultats de Breidt et Davis (1998). La loi et le niveau de la variance du bruit n’affectent donc pas fondamentalement la loi limite des maxima tirés de processus SV.

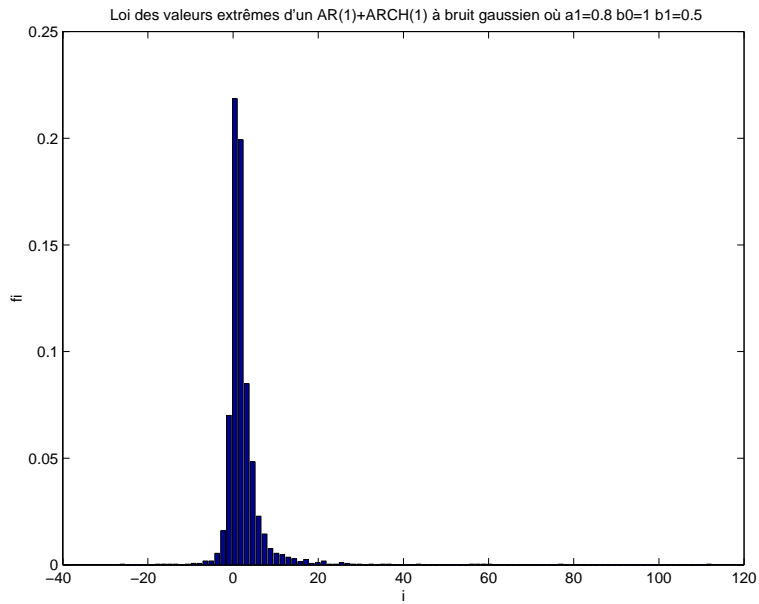


FIG. 13 –  $AR(1) - ARCH(1)$  avec  $a_1 = 0,8$ ,  $b_1 = 0,5$  sous hyp. d'une distrib. normale

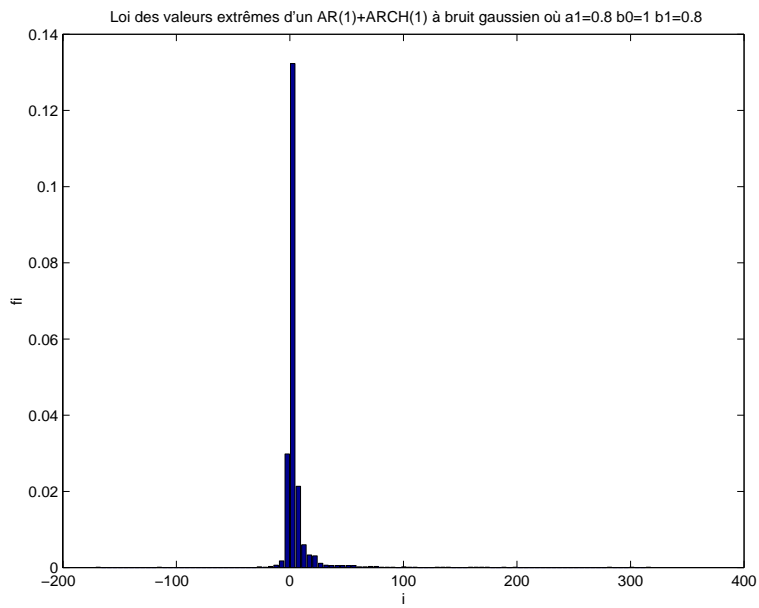


FIG. 14 –  $AR(1) - ARCH(1)$  avec  $a_1 = 0,8$ ,  $b_1 = 0,8$  sous hyp. d'une distrib. normale

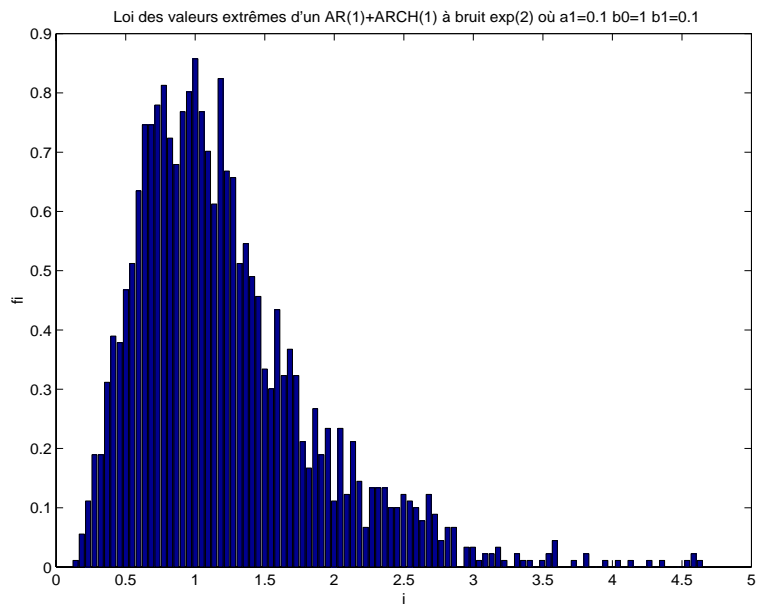


FIG. 15 –  $AR(1) - ARCH(1)$  avec  $a_1 = 0,1$ ,  $b_1 = 0,1$  sous hyp. d'une distrib. exponentielle

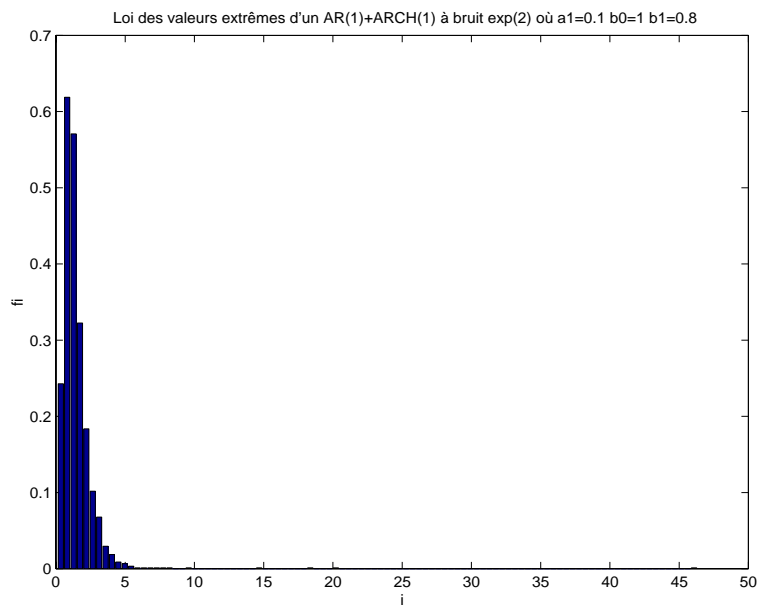


FIG. 16 –  $AR(1) - ARCH(1)$  avec  $a_1 = 0,1$ ,  $b_1 = 0,8$  sous hyp. d'une distrib. exponentielle

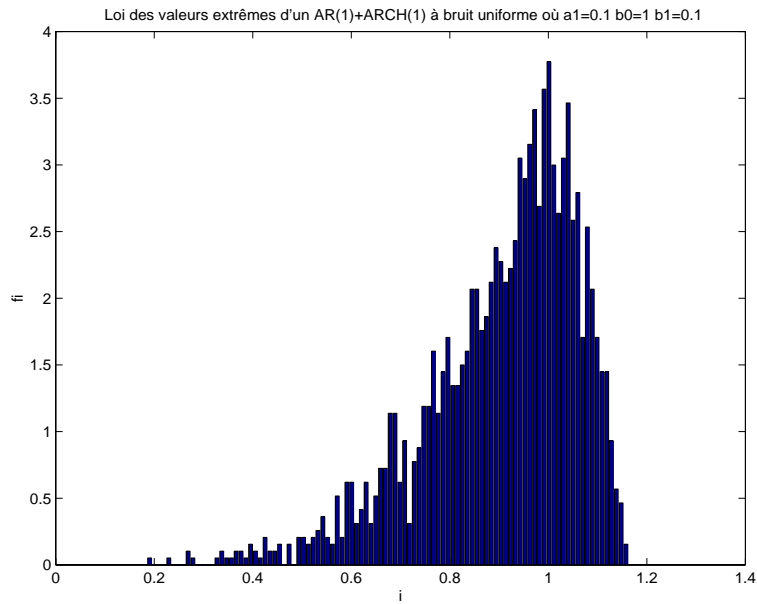


FIG. 17 –  $AR(1) - ARCH(1)$  avec  $a_1 = 0,1$ ,  $b_1 = 0,1$  sous hyp. d'une distrib. uniforme

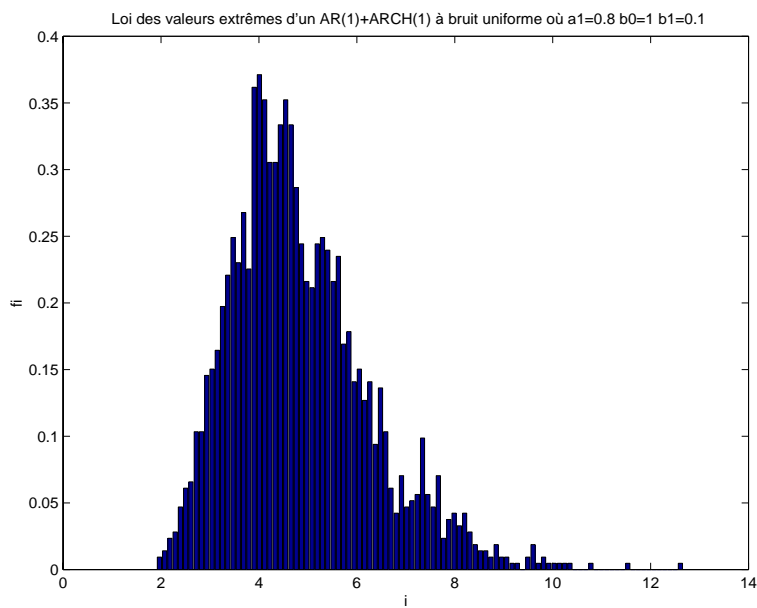


FIG. 18 –  $AR(1) - ARCH(1)$  avec  $a_1 = 0,8$ ,  $b_1 = 0,1$  sous hyp. d'une distrib. uniforme

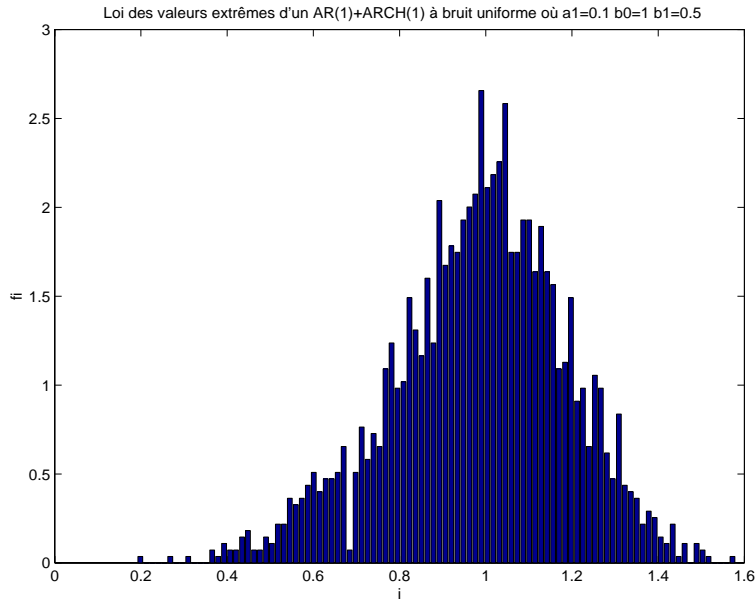


FIG. 19 –  $AR(1) - ARCH(1)$  avec  $a_1 = 0,1$ ,  $b_1 = 0,5$  sous hyp. d'une distrib. uniforme

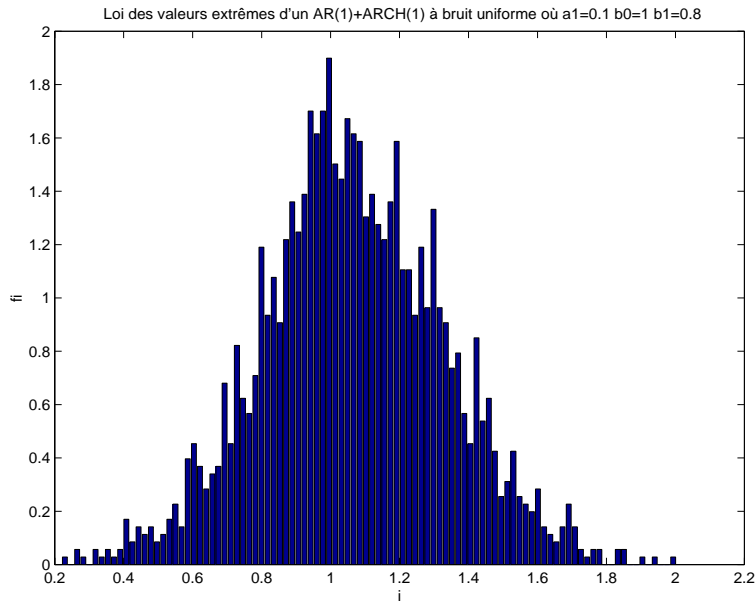


FIG. 20 –  $AR(1) - ARCH(1)$  avec  $a_1 = 0,1$ ,  $b_1 = 0,8$  sous hyp. d'une distrib. uniforme

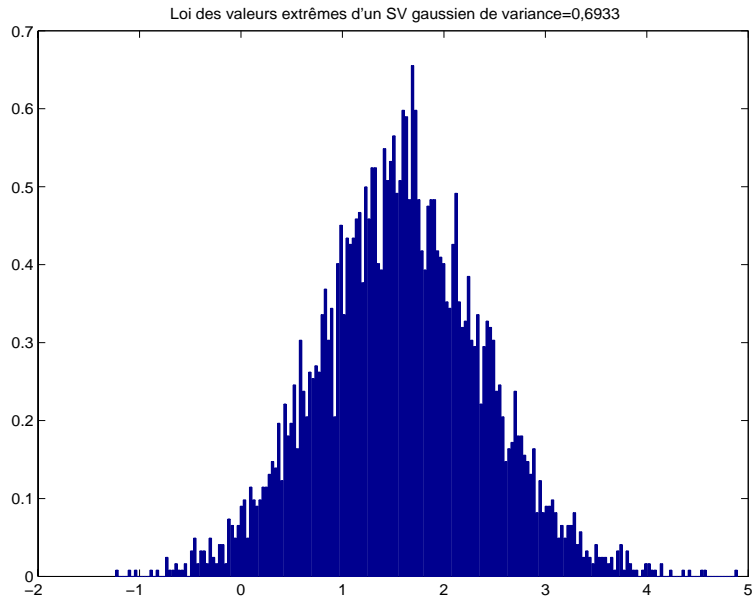


FIG. 21 – SV sous hyp. d'une distrib. normale avec une variance de 0,6933

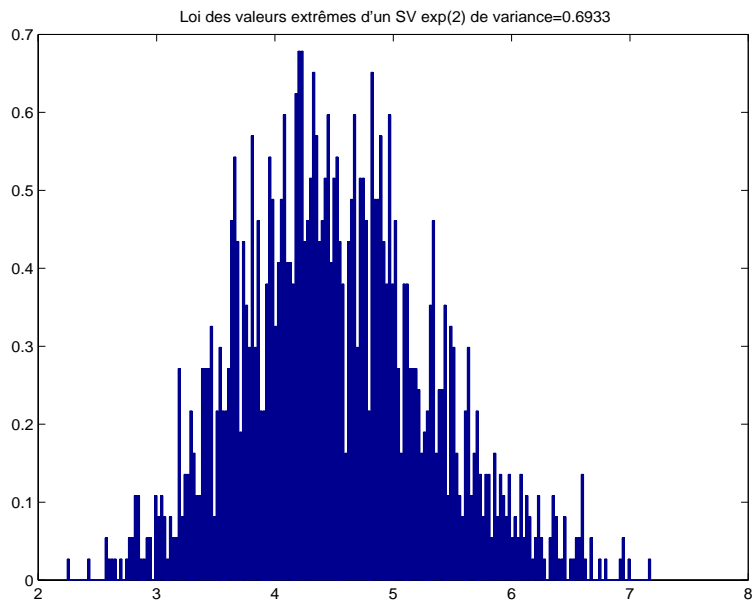


FIG. 22 – SV sous hyp. d'une distrib. exponentielle avec une variance de 0,6933

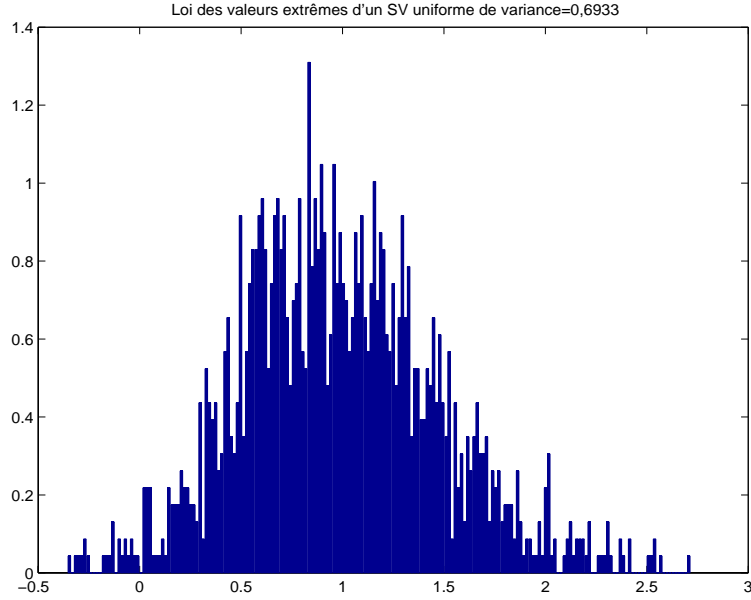


FIG. 23 –  $SV$  sous hyp. d'une distrib. exponentielle avec une variance de 0,6933

On observe des résultats similaires pour la distribution des maxima tirés des processus  $SV - AR(1)$ , simulés à partir d'un bruit Gaussien (figures 24, 25 et 26). En effet, quelles que soient la valeur du paramètre  $AR$  (significativement inférieur à 1) et celle de la variance du bruit, les profils de la distribution des maxima sont semblables et proches de ceux observés pour la loi des maxima tirés d'un simple processus  $SV$  (i.e. une loi de Gumbel). Là aussi, globalement, on a une confirmation des résultats de Breidt et Davis (1998) : les lois des maxima tirés des processus  $SV$  et  $SV + AR(1)$  semblent insensibles à la fois à la variance de la loi normale et au coefficient  $AR$ . Dans le cas d'un bruit exponentiel (figures 27 et 28) lorsque le paramètre  $AR$  est relativement faible (proche de 0,1), la distribution des maxima est de type Fréchet. En revanche, lorsque les valeurs de ce paramètre deviennent grandes (i.e. proches de 1) alors on retrouve des lois des maxima de type Gumbel. Dans le cas de bruit exponentiel, la loi des maxima serait ainsi sensible au paramètre  $AR$ . Dans le cas d'un bruit uniforme (figures 29 et 30), la loi des maxima correspond à celle obtenue par Breidt et Davis (1998) : quelle que soit la valeur du paramètre  $AR$ , la distribution des maxima est de type Gumbel ; ici, le comportement est différent de celui observé pour un  $AR(1) + ARCH(1)$ .

Rappelons que Breidt et Davis (1998) ont établi que les maxima d'un pro-

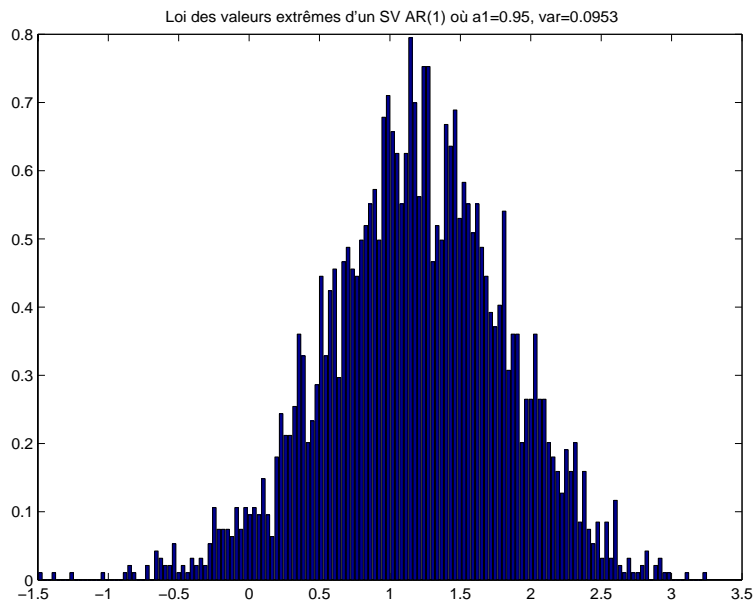


FIG. 24 – SV-AR(1) avec  $a_1 = 0,95$  sous hyp. d'une distrib. normale de variance 0,0953

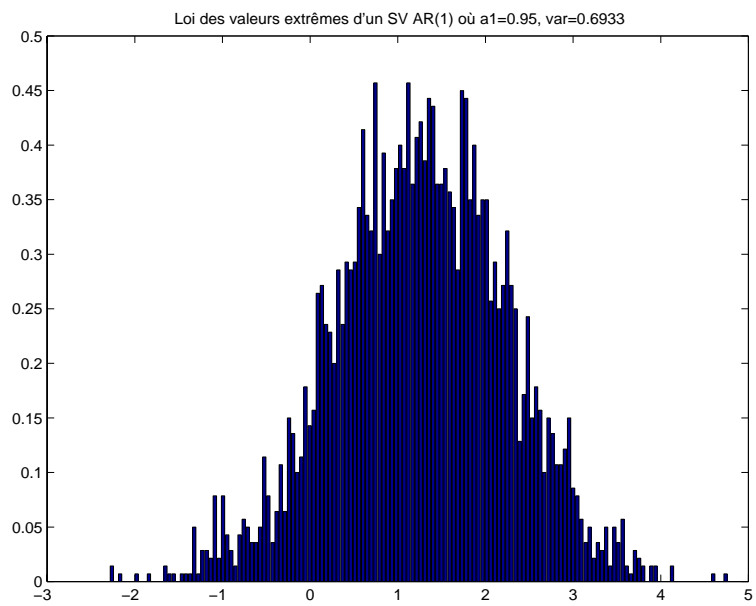


FIG. 25 – SV-AR(1) avec  $a_1 = 0,95$  sous hyp. d'une distrib. normale de variance 0,6933



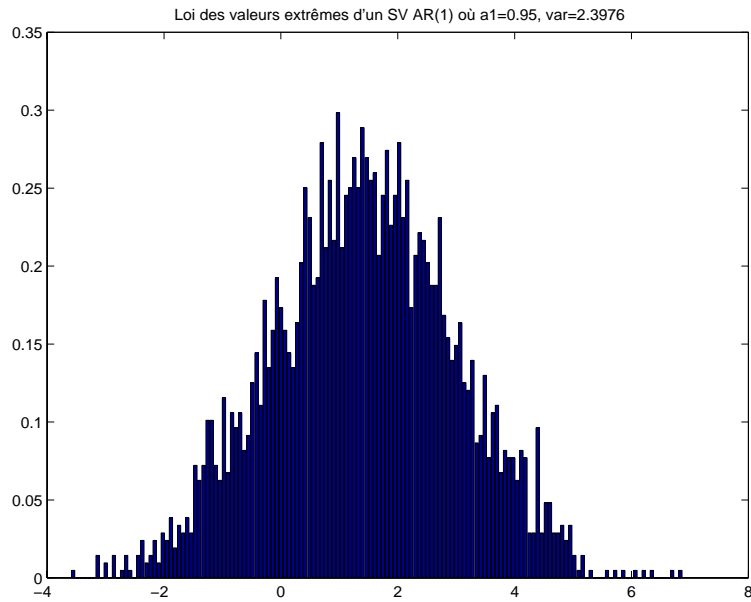


FIG. 26 – SV-AR(1) avec  $a_1 = 0,95$ , sous hyp. d'une distrib. normale de variance 2,3976

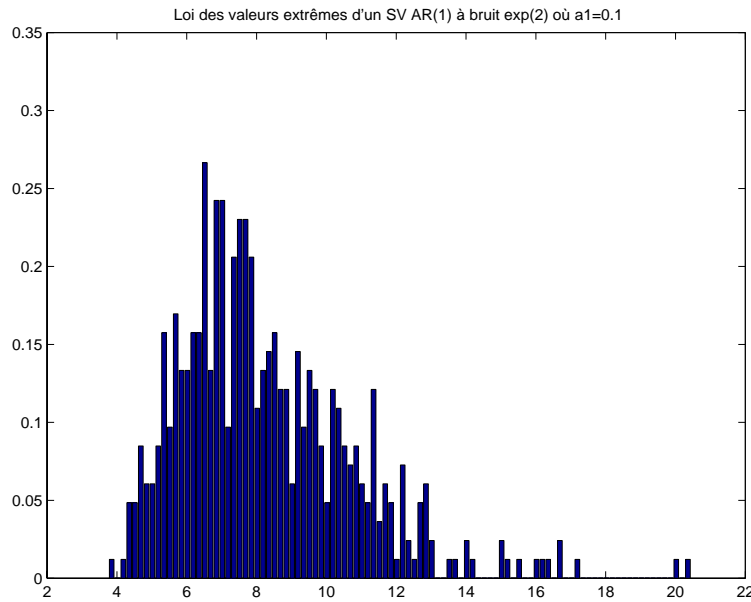


FIG. 27 – SV-AR(1) avec  $a_1 = 0,1$ , sous hyp. d'une distrib. exponentielle

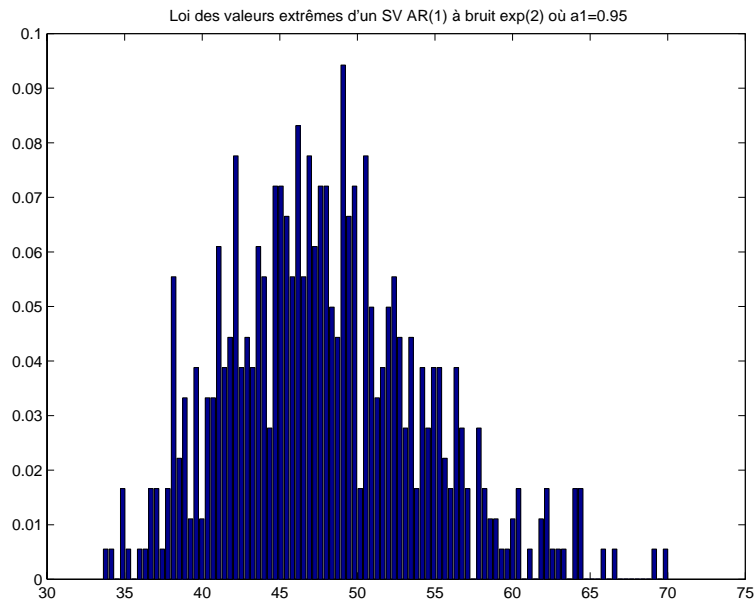


FIG. 28 – SV-AR(1) avec  $a_1 = 0,95$ , sous hyp. d'une distrib. exponentielle

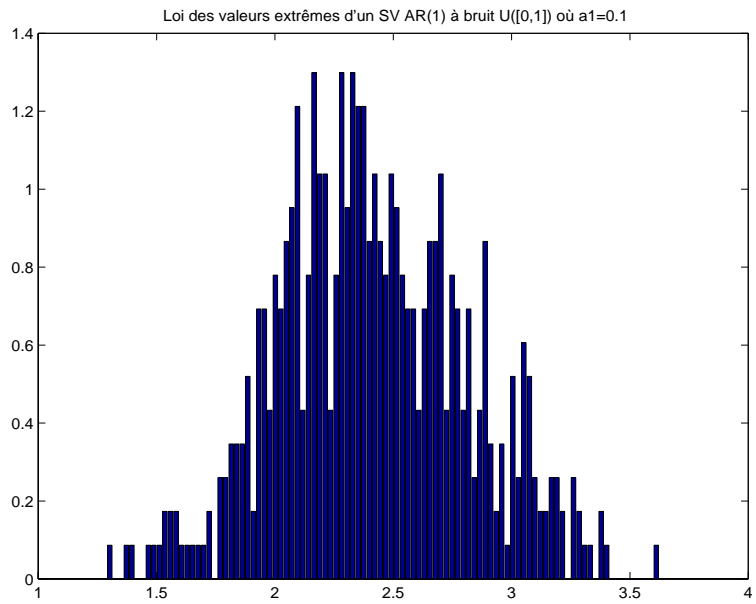


FIG. 29 – SV-AR(1) avec  $a_1 = 0,1$ , sous hyp. d'une distrib. uniforme

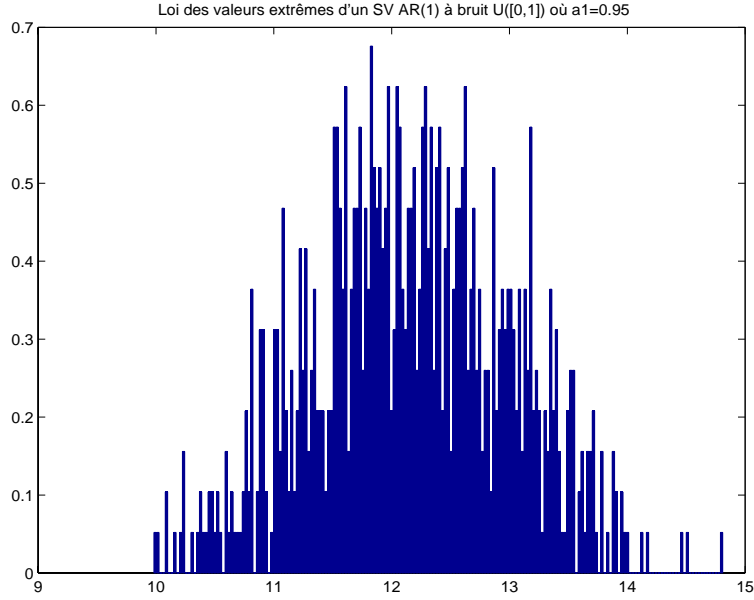


FIG. 30 – SV-AR(1) avec  $a_1 = 0,95$ , sous hyp. d’une distrib. uniforme

cessus  $SV + AR(1)$  suivent une loi de Gumbel. On vient de montrer que la loi limite prend la forme d’une courbe comparable à celle d’une loi de Gumbel. Néanmoins, il semble que la convergence soit excessivement lente. En effet, pour un processus  $SV + AR(1)$  ( $AR(1)$  sur  $\alpha_t$ ), avec  $a_1 = 0,95$  et  $T = 1000000$ , la loi empirique n’atteint pas la loi de Gumbel. A partir d’une certaine valeur de  $T$ , taille de l’échantillon, ( $T = 10000$ ), la courbe empirique se stabilise pratiquement. Cette convergence lente, rend difficile l’utilisation de ce type de résultat à distance finie.

Par ailleurs, nous pouvons utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de normalisation. Nous développerons maintenant brièvement cette méthode. Etant donnée une série  $M_n$  i.i.d. suivant une loi de Gumbel, avec un paramètre de centrage  $b$  et un paramètre d’échelle  $a$ , on a :

$$P(a(M - b) \leq x) = \exp(-e^{-x}),$$

i.e.,

$$P(M \leq y) = \exp(-e^{-a(y-b)}).$$

Si  $\bar{m}$  désigne la moyenne des  $(M_i = m_i), i = 1, \dots, N$ , la log-vraisemblance

associée aux réalisations  $(M_i = m_i), i = 1, \dots, N$  est égale à :

$$l_N = N(\log a - a(\bar{m} - b)) - \sum_{i=1}^N e^{-a(m_i - b)}.$$

On en déduit les équations de vraisemblance :

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i e^{-\hat{a}m_i}}{\sum_{i=1}^N e^{-\hat{a}m_i}} + \frac{1}{\hat{a}}$$

$$\hat{b} = \frac{1}{\hat{a}} \log\left(\frac{N}{\sum_{i=1}^N e^{-\hat{a}m_i}}\right).$$

En utilisant un algorithme de type Newton-Raphson, on détermine d'abord  $\hat{a}$  puis  $\hat{b}$ . Bien entendu, un des problèmes rencontrés ici est lié au choix de la valeur initiale des paramètres qui permet de démarrer l'algorithme. Nous avons testé cette méthode pour un AR(1) et un MA(1), les résultats montrent que les estimateurs de a et de b sont relativement stables et conformes aux conclusions du théorème de Breidt et Davis dès lors que le processus  $\alpha$  admet une décomposition de Wold.

Le tableau suivant reproduit des estimations de  $\hat{a}$  et de  $\hat{b}$  dans le cas où la variance de  $\alpha$  est constante et égale à 0,009 (voir tableau) :

AR(1)	0,0	0,5	0,0	0,3	0,6
MA(1)	0,5	0,0	0,0	0,4	0,8
$\sigma_\epsilon$	0,7448	0,721	0,8326	0,6713	0,4131
$\hat{a}$	4,445	4,458	4,471	4,485	4,461
$\hat{b}$	5,016	5,014	5,012	5,004	5,000
$\sigma_\alpha$	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009

Ce tableau récapitulatif montre bien que  $\hat{a}$  est quasi stable sous l'hypothèse de constance de l'écart-type du processus  $\alpha$ . Seule la vitesse de convergence semble varier d'un processus à l'autre en fonction du paramètre de l'AR.

Enfin, nous abordons le comportement de la loi des maxima pour les processus bilinéaires simulés à partir d'un bruit Gaussien (figures 31, 32 et 33) ou exponentiel (figure 34) ou uniforme (figures 35, 36, 37 et 38). Dans le cas d'un

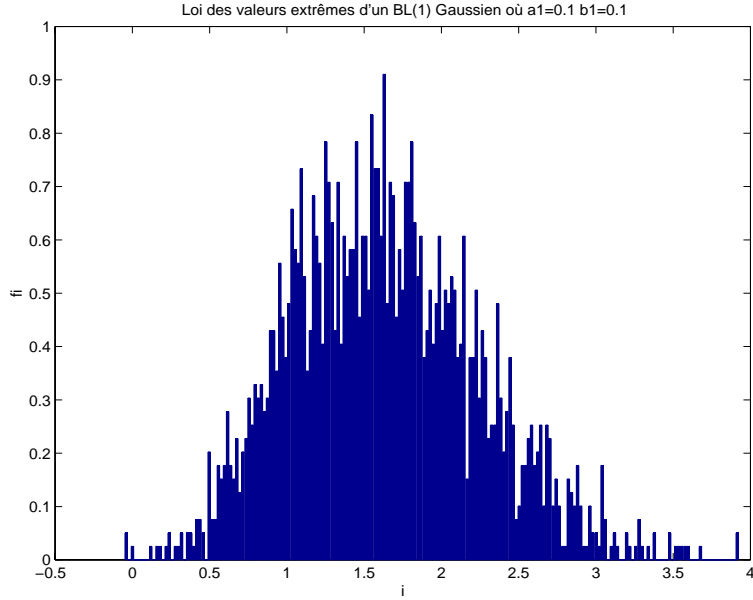


FIG. 31 – Loi bilinéaire avec  $a_1 = 0,1$  et  $b_1 = 0,1$  sous hyp. d'une distrib. normale

bruit Gaussien, si on fixe le paramètre bilinéaire  $b_1$  à une valeur relativement faible, quelle que soit la valeur du paramètre  $a_1$ , on retrouve un comportement similaire à celui d'un AR Gaussien (loi de type Gumbel). En revanche, quand on fixe la valeur de  $a_1$  et que l'on fait varier le paramètre  $b_1$ , dès que  $b_1$  devient assez grand, la distribution est plutôt de type Fréchet. Dans le cas d'un bruit exponentiel, quelles que soient les valeurs des paramètres  $a_1$  et  $b_1$ , la loi des maxima correspond à une distribution de Fréchet. Pour un bruit uniforme, si on fixe  $b_1$  à un niveau faible, on constate que la loi des maxima évolue d'une distribution à forme dissymétrique à gauche (Weibull) vers une distribution symétrique au fur et à mesure que  $a_1$  augmente. De même, on constate que si on fixe  $a_1$  en faisant varier  $b_1$  de manière croissante, on passe alors d'une distribution symétrique à gauche (Weibull) à une distribution symétrique à droite (Fréchet). Au total, dans le cas des processus bilinéaires, la loi limite des maxima dépend fortement des valeurs des paramètres  $a_1$  et  $b_1$  pour les bruits gaussien et uniforme. En revanche, elle est insensible à la valeur prise par ces paramètres dans le cas d'un bruit exponentiel.

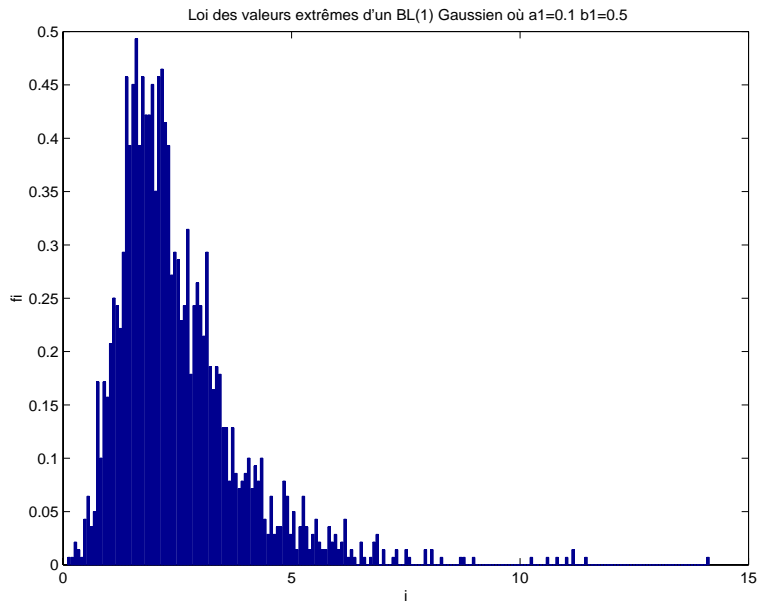


FIG. 32 – Loi bilinéaire avec  $a_1 = 0,1$  et  $b_1 = 0,5$  sous hyp. d'une distrib. normale

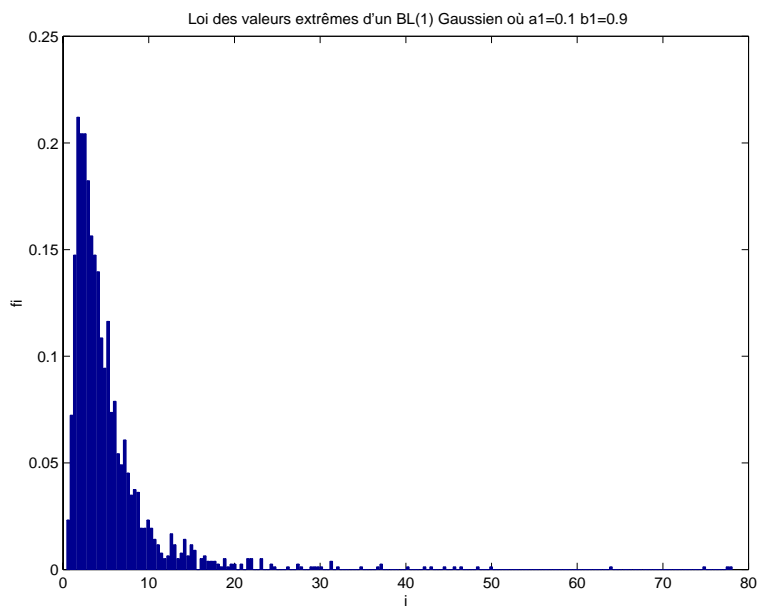


FIG. 33 – Loi bilinéaire avec  $a_1 = 0,1$  et  $b_1 = 0,9$  sous hyp. d'une distrib. normale

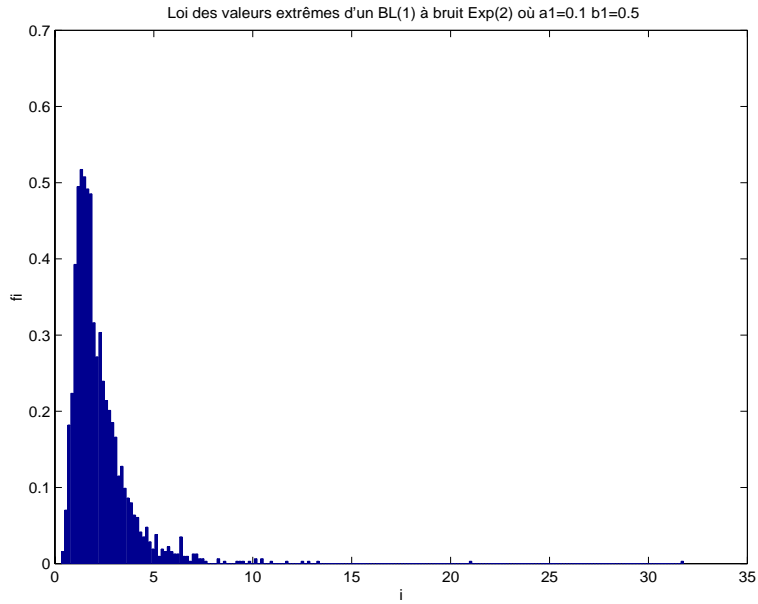


FIG. 34 – Loi bilinéaire avec  $a_1 = 0,1$  et  $b_1 = 0,5$  sous hyp. d'une distrib. exponentielle

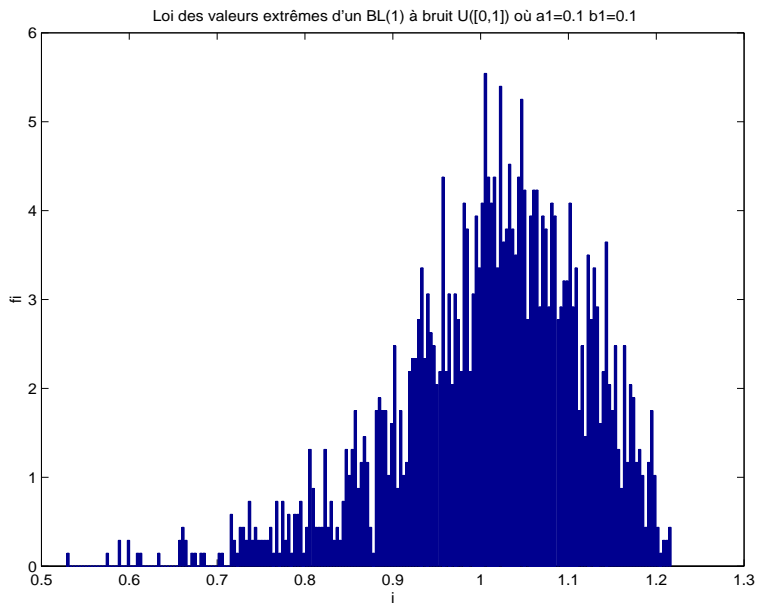


FIG. 35 – Loi bilinéaire avec  $a_1 = 0,1$  et  $b_1 = 0,1$  sous hyp. d'une distrib. uniforme

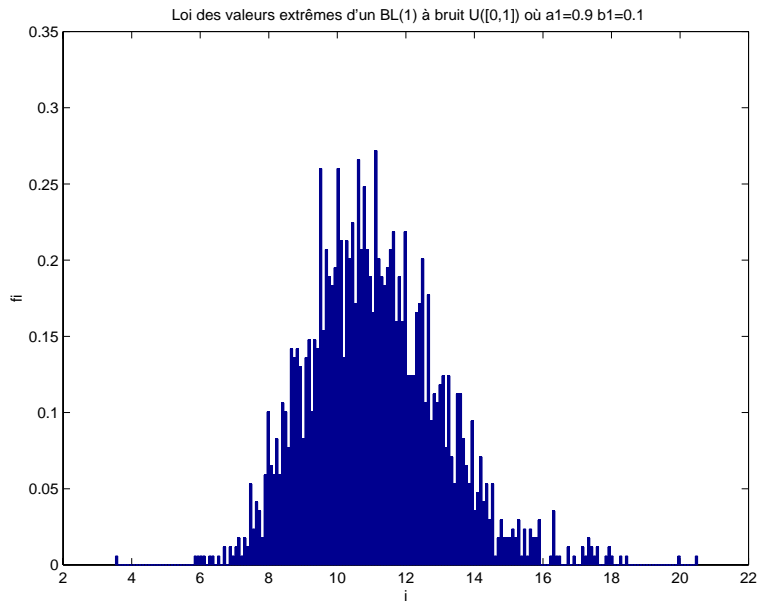


FIG. 36 – Loi bilinéaire avec  $a_1 = 0,9$  et  $b_1 = 0,1$  sous hyp. d'une distrib. uniforme

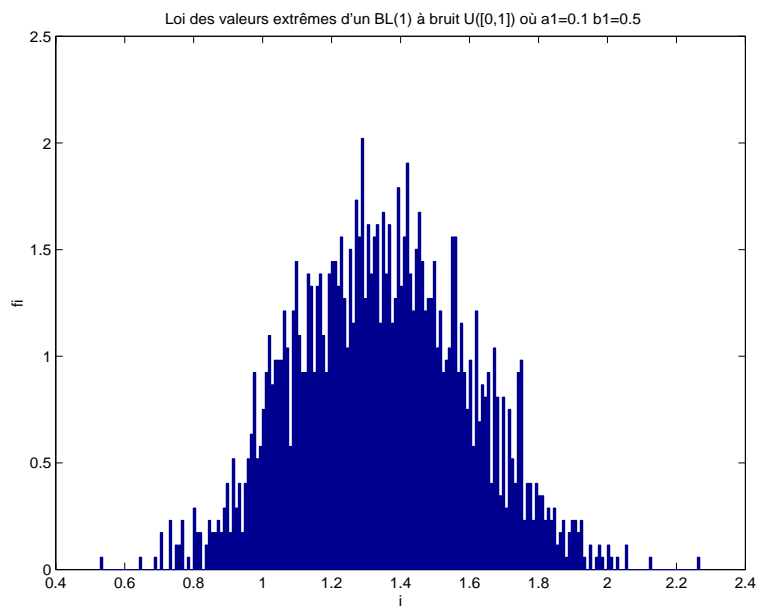


FIG. 37 – Loi bilinéaire avec  $a_1 = 0,1$  et  $b_1 = 0,5$  sous hyp. d'une distrib. uniforme



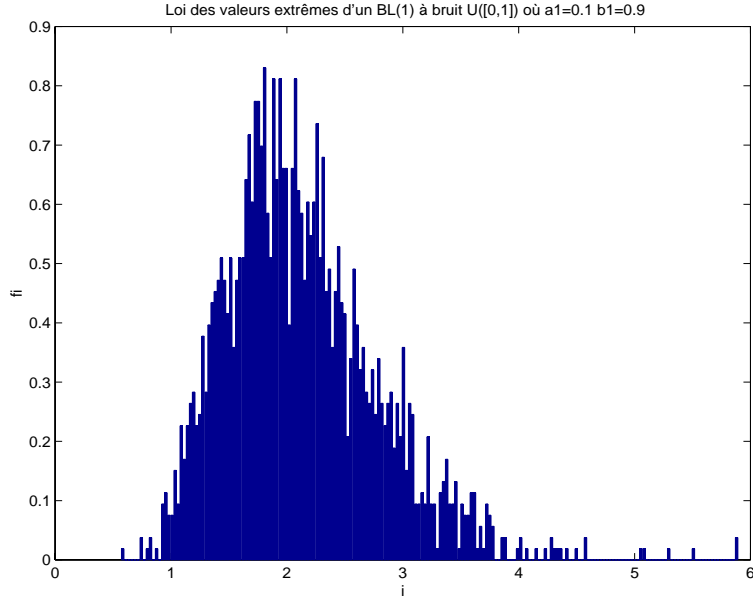


FIG. 38 – Loi bilinéaire avec  $a_1 = 0,1$  et  $b_1 = 0,9$  sous hyp. d'une distrib. uniforme

Ces conclusions tirées des résultats de simulations empiriques permettent de vérifier que, pour presque tous les processus stationnaires considérés, la loi des maxima appartient au domaine d'attraction  $D(G_\alpha)$  des lois standard des valeurs extrêmes,  $G_\alpha$  étant définie par :

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \alpha x)^{-\frac{1}{\alpha}}) & \alpha \neq 0, 1 + \alpha x > 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \alpha = 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Toutefois, il est difficile de reconnaître avec certitude à quelle distribution elle correspond, le choix des paramètres caractérisant les processus et celui des bruits semblent prépondérants dans une identification précise de la loi des maxima. Une application mécanique de certains théorèmes pourrait donc conduire à des problèmes de mauvaises spécifications des équations décrivant l'évolution des valeurs extrêmes ou à leurs utilisations inappropriées dans des modèles d'évaluation du risque.

## 6 Conclusion

On peut puiser de différentes justifications de l'étude des valeurs extrêmes dans l'observation des marchés financiers. D'abord en haute fréquence, assez

naturellement, le nombre d'évènements rares augmente. Ensuite, depuis les travaux de Mandelbrot (1963), on sait que les lois des rendements de certains actifs financiers ne sont pas gaussiennes sur des périodes définies. En outre, elles ont un comportement asymptotique plus lent que celui de la loi normale. Enfin, à l'évidence, la volatilité affectant les marchés financiers varie au cours du temps : elle est parfois asymétrique ; les hausses (ou les baisses) sont en général suivies des variations de même sens (Engle, 1982, Bollerslev *et al.*, 1992). Il est donc légitime de se demander comment prendre en compte ces queues de distributions plus épaisses que celles d'une gaussienne. Or l'évolution des queues de distributions est fondamentalement liée à l'existence d'évènements rares plus ou moins importants. C'est en cela que connaître le comportement des maxima d'une série est utile et intéressant.

De nombreux travaux empiriques consacrés aux comportements extrêmes ont été développés ces dernières années (Akgiray et al. (1988), Koedijk et al. (1990), Hols et De Vries (1991) ou plus récemment McNeil et Frey (1998) ou McNeil (1999 par exemple)). Ces travaux ont été, en partie, orientés vers l'estimation des paramètres permettant de tester la vitesse de décroissance de la queue de la distribution. Ici, nous nous intéressons plutôt à l'identification de domaine d'attraction de variables aléatoires  $X$ , engendrées par un processus stationnaire donné. D'une manière générale, les résultats issus de simulations empiriques incitent à prendre des précautions pour garantir une utilisation adéquate des théorèmes. En effet, la loi limite des maxima semble généralement tributaire des hypothèses relatives aux bruits mais également des paramètres caractéristiques des différents processus générateurs des données. Clairement, une application directe et mécanique des résultats théoriques issus des principaux théorèmes peut être une source d'erreur dans la manipulation des maxima via leur distribution. Ceci pourrait alors réduire dans une large mesure la portée de ce type d'approche, notamment dans leurs applications à la prise en compte du risque dans les modèles de gestion de risque.

Suite à ce travail plusieurs pistes de recherche nous semblent intéressantes. Comment déterminer précisément les suites  $(c_n)$  et  $(d_n)$  de normalisation qui apparaissent dans le théorème de Fisher-Tippett pour des processus spécifiques. Etablir précisément les lois extrêmes suivies par certains processus en fonction des valeurs des paramètres, afin d'établir une théorie du calcul des risques à partir de cette approche. le prolongement en multivarié est aussi indispensable pour bien maîtriser ces différents problèmes et leurs applications pour le calcul des risques en gestion de portefeuilles.

## Bibliographie :

C.W. Anderson, S. Nadarajah, J.A. Tawn (1998) Ordered Multivariate Extremes, *J. Royal Statist. Soc. B*, **60**, 473-496.

C.W. Anderson (1970) Extreme Value Theory for a Class of Discrete Distributions With Applications to Some Stochastics Processes *J. Appl. Probab.* **7**, 99-113.

R.J. Adler (1978) Weak Convergence Results for Extremal Processes Generated by Dependent Random Variables *Ann. Probab.* **6**, 660-667.

V. Akgiray, G.G. Boots, B. Seifert (1988) Distribution Properties of the Latin American Black Market Exchange Rates, *Journ. of the Intern. Money and Fin.*, **7**, 37 - 48.

M.T. Alpuim, N.A. Catkan, J. Hüsler (1995) Extremes and Clustering of Non Stationary  $Max - AR(1)$  Sequences, *Stoch. Proc. and their Appl.*, **56**, 171 - 184.

M.I.F. Alves, M.I. Gomes (1996) Statistical Choice of Extreme Value Domains of Attraction- A Comparative Analysis *Commun. Statist. Theory meth.*, **25(4)**, 789 - 811.

M.I.F. Alves (1995) Estimation of the Tail Parameter in the Domain of Attraction of an Extremal Distribution, preprint, *J. Statist. Planning and Inference*, **45**, 143-173.

K.B. Athreya, S.N. Lahiri, W. Wu (1998) Inference for Heavy Tails Distribution, *Journal of Statistical Planning Inference*, **66**, 61 - 75.

J.N. Bacro, M. Brito (1998) A Tail Bootstrap Procedure for Estimating the Tail Pareto - Index, *Journal of Statistical Planning Inference*, **71**, 245 - 260.

A.A. Balkema, E.I. Pancheva (1996) Decomposition for Multivariate Extremal Processes *Commun. Statist. Theory Meth.*, **25(4)**, 737 - 758.

R. Ballerini, W.P. McCormick (1989) Extreme Value Theory for Processes with Periodic Variances *Commun. Statist. Stochastic Models*, **5**, 45-61.

S.M. Berman (1971) Asymptotic Independence of the Numbers of High and

- Low Level Crossings of Stationary Gaussian Processes. *Ann. Math. Statist.*, **42**, 927-945.
- S.M. Berman (1964a) Limit Theorems for the Maximum Term in Stationary Sequences. *Ann. Math. Statist.*, **35**, 502-516.
- S.M. Berman (1964b) Limiting Distribution of the Maximum of a Diffusion Process. *Ann. Math. Statist.*, **35**, 319-329.
- T. Bollerslev (1990) Modelling the Coherence in Short-Run nominal Exchange Rates : A Multivariate Generalized ARCH Model, , *The Review of Economics and Statistics*, **72**, 121-131.
- T. Bollerslev, R. Y. Chou, N. Jayaraman, K.F. Kroner (1992) ARCH Modeling in Finance : A review of the Theory and Empirical Evidence,, *The Journal of Econometrics*, **52**, 5-60.
- M. Borkovec (1999) Extremal Behavior of the *AR* Process with *ARCH*(1) Errors, *Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology*, Preprint.
- M. Borkovec, C. Klüppelberg (1998) The Tail of the Stationary Distribution of an *AR* Process with *ARCH* Errors, *Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology*, Preprint.
- L. Von Bortkiewicz (1922) Variationbreite und Mittlere Fehler. *Sitzungsber. Berliner Math. Ges.*, **21**.
- F.J. Breidt, R.A. Davis (1998) Extremes of Stochastic Volatility Models, *Annals of Applied Probability*, **8**, 664-675.
- L. Breiman (1968) Probability, *Readings Massachusetts : Addison-Wesley*.
- R. Brummelhuis, D. Guégan (2000) Extreme Values of Conditional Distribution of GARCH(1,1) Processes, *Univ. of Reims France*, Preprint.
- J. Burridge, E. Guerre (1996) The Limit Distribution of Level Crossings of a Random Walk and a Simple Unit Root Test, *Econometric Theory*, 705 - 723.
- M.R. Chernick (1981a) A Limit Theorem for the Maximum of Autoregressive Processes with Uniform Marginal Distributions, *Ann. Probab.*, **9**, 145-149.

- M.R. Chernick (1981b) On Strong Mixing and Leadbetter's D Condition *J. Appl. Probab.*, **18**, 764-769.
- Y.S. Chow, H. Teicher (1978) Probability Theory, Independence, Interchangeability, Martingales, 2nd ed., *Springer Verlag, Berlin*.
- K.L. Chung, P. Erdos (1952) On the Applications of the Borel - Cantelli lemma, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**, 179-186.
- P.K. Clark (1973) A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices, *Econometrica*, **41(1)**, 135-156.
- J. Cohen (1984) The Asymptotic Behavior of the Maximum Estimators for Univariate Extremes, Statistical Extremes and Applications J. Tiago de Oliveira ed., *D. Reide Publishing Company*.
- S.G. Coles, J.A. Tawn (1994) Statistical Methods For Multivariate Extremes : an Application to Structural Design (with discussion), *Appl. Statist.*, **43**, 1-48.
- S.G. Coles, J.A. Tawn (1991) Modelling Extremes Multivariate Events, *J. R. Statist. Soc. B*, **53**, 377-392.
- H. Cramer, M.R. Leadbetter (1967) Stationary and Related Stochastic Processes, *J. Wiley*, N.Y.
- S. Czorgo, D.M. Mason (1985) Central Limit Theorems for Sums of Extreme Values, *Math. Proc. Cambridge. Phil. Soc.*
- M. Dacorogna, U.A. Muller, O.V. Pictet, G.C. de Vries (1995), The Distribution of Extremal Foreign Exchange Rate Returns in Extremely Large Datasets, Preprint, Olsen & Associés. Research Group, Zurich.
- H.A. David (1981) Order statistics, 2nd edition, *New York Wiley*.
- R.A. Davis, T. Mikosch, B. Basrak (1998) The Sample ACF of Solutions to Multivariate Stochastic Recurrence Equations, *technical Report*.
- R.A. Davis, S.I. Resnick (1995) Limit Theory for Bilinear Processes with Heavy Tailed Noise, *Preprint, to appear in Annals of Applied Probability*.

- R.A. Davis, S.I. Resnick (1991) Extremes of Moving Averages of Random Variables with Finite Endpoint, *Annals of Prob.*, **19**, 312 - 328.
- R.A. Davis, S.I. Resnick (1988a) Extremes of Moving Averages of Random Variables from the Domain of Attraction of the Double Exponential Distributions, *Stoch. Proc. and their Appl.*, **30**, 41 -68.
- R. Davis, S. Resnick (1988b) Tail Estimates Motivated by Extreme Value Theory, *Annals of Stat.*, **12**, 1467 - 1468.
- R.A. Davis (1982) Limit Laws for the Maximum and Minimum of Stationary Sequence, *Z. Wahrsch Verw. Geb.*, **61**, 31-42.
- P. Deheuvels, E. Haeusler, D.M. Mason (1988) Almost Sure Convergence of the Hill Estimator, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **104**, 371 - 381.
- P. Deheuvels (1984) Strong Approximation in Extreme Value Theory and Applications, *Colloquium on Limit Theorems in Probability and Statistics*, **1**, North-Holland.
- A.L.M. Dekkers, L. Haan de (1993) Optimal Choice of Sample Fraction in Extreme-Value Estimation, *J. Multivariate Anal*, **47**, 173-195.
- A.L.M. Dekkers, L. Haan de (1989a) On the Estimation of the Extreme-Value Index and Large Quantile Estimation, *Ann. Statist.*, **17**, 1795-1832.
- A.L.M. Dekkers, J.H.J. Einmahl, L. Haan de (1989b) A Moment Estimator for the Index of an Extreme-Value Distribution, *Ann. Statist.*, **17**, 1833-1855.
- J. Diebolt, D. Guégan (1993) Tail Behaviour of the Stationary Density of General Nonlinear Autoregressive Process of Order One", *Journal of Applied Prob.*, **30**, 315-329.
- A. Diop, D. Guégan (2000) Asymptotic Behavior for the Extreme Values of a Regression Model *Univ. of Reims France*, Preprint.
- E.L. Dodd (1923) The Greatest and the Least Variate Under General Laws of Error, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **25**, 525-539.

- H. Drees (1998) Estimating Extreme Value Index *Habilitationsschrift*, Mathematics Faculty, University of Cologne, Germany.
- H. Drees (1995) Refined Pickands Estimators of Extreme Value Index, *Ann. Statist.*, **23**, 2059-2080.
- P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch (1997) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag Heidelberg.
- R.F. Engle (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, *Econometrica*, **50**, 987 - 1008.
- D. Faucon, E. Jungers, A. Lecanon, F. Rigou (2000) Etudes pratiques autour de la théorie des valeurs extrêmes, *Rapport de groupe de Stat. Appliquée*, ENSAE, Malakoff France.
- W. Feller (1971) An Introduction to Probability Theory and Its Applications, *New York : Wiley*, **2**, 2nd edition.
- T.S. Fergusson (1996) A Course in Large Sample Theory. *Chapman and Hall*, London.
- R.A. Fisher, L.H.C. Tippett (1928) Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **24**, 180-190.
- M. Fréchet (1927) Sur la Loi de Probabilité de l'écart Maximum, *Ann. Soc. Math. Polon.*, **6**, 93-116.
- J. Galambos (1978) The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, *Wiley, New York*.
- J. Galambos (1975) Limit Laws for Mixtures With Applications to Asymptotic Theory of Extremes, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **32**, 197-207.
- J. Galambos (1972) On the Distribution of the Maximum of Random Variables, *Ann. Math. Statist.*, **43**, 516-521.
- N. Glick (1978) Breaking Records and Breaking Boards, *Amer. Math. Monthly*, **85**, 2-26.

- J. Goeffroy (1965) Sur une condition nécessaire et suffisante de stabilité presque sûre des valeurs extrêmes d'un échantillon, *Compte Rendu Acad Sc. Paris*, t. **260**.
- J. Goeffroy (1958/1959) Contributions à la théorie des valeurs extrêmes, *Publi. Inst. Stat. Univ. Paris*, **7/8**, 37-185.
- B. Gnedenko (1943) Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. Math.*, **44(3)**, 423 - 453.
- D. Guégan (2000) A New Model : the k-Factor GIGARCH Process, *J. of Signal Processing*, **4**, 265 - 271.
- D. Guégan, J. Diebolt (1994) Probabilistic Properties of the Béta-ARCH Model, *Statistica Sinica*, **2**, 157.
- D. Guégan (1994) Séries chronologiques non linéaires à temps discret, *Economica*, Paris.
- E.J. Gumbel, C. K. Mustafi (1967) Some Analytical Properties of Bivariate Extremal Distributions, *J. Amer. Statis. Assoc.*, **62**, 569-588.
- E.J. Gumbel (1958) Statistics of Extremes, Columbia University Press.
- L. Haan de, J. Ronde (1998) Sea and Wind : Multivariate Extremes at Work, *Preprint*.
- L. Haan de, S.I. Resnick, H. Rootzèn, C.G. Vriès de (1989) Extremal Behaviour of Solutions to Stochastic Difference Equation with applications to ARCH Processes, *Stochastic Processes and their Applications*, **32**, 213 - 224.
- L. Haan de, S.I. Resnick (1979) Derivatives of Regularly Varying Functions in  $\mathbb{R}^d$  and Domains of Attraction of Stable Distributions, *Stoch. Proc. Appl.*, **8**, 349-355.
- L. Haan de, A. Hordijk (1972) The Rate of Growth of Sample Maxima, *Ann. Math. Statis.*, **43**, 1185-1196.
- L. Haan de (1970) On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes Mathematisch Centrum Amsterdam.



- L. Haan de (1971) A Form of regular Variation and its Application to the Domain of attraction of the Double Exponential Distribution, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **17**, 241-258.
- J.B.S. Haldane, S.D. Jayakar (1963) The Distribution of Extremal and Nearly Extremal Values in Samples from Normal Population, *Biometrika*, **50**, 89-94.
- A.O. Hall (1996) Maximum Trend of a Particular Autoregressive Sequence with Discrete Margins, *Commun. Syat. - Theory meth*, **25**, 721 - 736.
- P. Hall, A.H. Welsh (1984) Best Attainable Rates of Convergence for Estimates of Parameters of Regular Variations, *Ann. Statist.*, **12**, 1079 - 1084.
- P. Hall (1982) On Some Simple Estimates of an Exponent of Regular Variation, *J.R.S.S.B*, **44**, 37 - 42.
- P. Hall (1980) Estimating Probabilities for Normal Extremes *Adv. Appl. Prob.*, **12**, 491-500.
- P. Hall (1979) On the Rate of Convergence of Normal Extremes, *J. Appl. Probab.*, **16**, 433-439.
- A.M. Hasofer, Z. Wang (1992) A Test for Extreme Value Domain of Attraction, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **89**, 171-177.
- E. Hauesler , J.L. Teugel (1985) On Asymptotic Normality of Hill's Estimator for the Exponent of Regular Variation, *Annals of Stat.*, **13**, 743 - 756.
- L. Herbach (1984) Introduction, Gumbel Model Statistical Extremes and Applications J. Tiago de Oliveira Ed., D. Reidel Publishing Company.
- C.C. Heyde (1967) A Contribution to the Theory of Large Deviations for Sums of Independent Random Variables *Z. Warhscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **7**, 303-308.
- B. Hill (1975) A Simple Approach to Inference About Tail of a Distribution, *Ann. Statist.*, **3**, 1163-1174.
- M.C. Hols, C.G. De Vries (1991) The Limiting Distribution of Extremal Exchange Rate Returns, *Journ. of Applied Econometrics*, **6**, 287 - 302.

- J. Horowitz (1980) Extreme Value for a Nonstationary Stochastic Process : An Application to Air Quality Analysis, *Technometrics*, **22(4)**, 469 - 478.
- D.P. Hougaard (1986) A Class of Multivariate Failure Time Distributions *Biometrika*, **73(3)**, 671 - 678.
- T. Hsing (1984) Point Process Associated with Extreme Value Theory, *Technical Report*, University of North Carolina, Chapel Hill.
- T. Hsing (1991a) On Tail Index Estimation Using Dependant Data, *Annals of Statistics*, **19**, 1547-1569.
- T. Hsing (1991b) Estimating the Parameters of Rare Events, *Stochastic Process. Appl.*, **37**, 117-139.
- T. Hsing (1993) Extremal Index Estimation for a Weakly Dependant Stationary Sequence, *Annals of statistics*, **21**, 2043-2071.
- J. Hüsler (1994) Maxima of Bivariate Random Vectors : Between Independence and Complete Dependence *Statistics and Probability Letters*, **21**, 385-394.
- J. Hüsler (1989) Limit Properties for Multivariate Extreme Values in Sequences of Independant, Non-Identically Distributed Random Vectors, *Stochastic Processes and their Applications atistics*, **31(1)**, 105-116.
- J. Hüsler (1985) Extreme Values and Rare Events of Non-Stationary Random Sequences Dependence in Probability and Statistics : A Survey of Some Recent Results E.Eberlein, M.S. Taquq ed.
- J. Hüsler (1981) A Note on the Functional Law of Iterated Logarithm for Maxima of Gaussian Sequences, *J. Multivariate Anal.* **11**, 273-279.
- I.A. Ibrajimov, Yu.K. Linnik (1971) Independant and Stationary Sequences of Random Variables. *Walters-Noordhoff Publi.*, Groningen.
- S. Ikeda, T. Matsunawa (1970) On asymptotic Independance of Order Statistics *Ann. Inst. Stat. Math.*, *Tokyo*, **22**, 435-449.
- A. Jordan (1927) The Foundations of the Theory of Probability, *Math. Phys.*

*Lapok*, **34**, 109 - 137, Budapest.

T. Kawata (1951) Limit Distribution of Single Order Statistics, *Rep. Stat. Appl. Res.*, **1**, 4 - 9.

H. Kesten (1973) Random Difference Equations and Renewal Theory for Products of Random Matrices, *Acta Math.*, **131**, 207-248.

K.G. Koedijk, M.M.A. Schafgans, C. G. De Vries (1990) The Tail Index of Exchange Rate Returns, *Journ. of Intern. Economics*, **29**, 93 -108.

E.G. Kounias (1968) Bounds of the Probability of an Union with Applications, *Ann. Math. Stat*, **39**, 2154 - 2158.

T.L. Lai, H. Robbins (1976) Maximally Dependent Random Variables, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **73**, 286-288.

J. Lamperti (1964) On Extreme Order Statistics, *Ann. Math. Statist.*, **35**, 1726 - 1737.

M.R. Leadbetter, G. Lindgen, H. Rootzèn (1983) Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes, *Springer-Verlag*.

M.R. Leadbetter (1982) Extreme and Local Dependence in Stationary Sequences, *Center for Stochastic Processes Report*, **12**, Statistics Dept, University of N.C..

M.R. Leadbetter (1978) Extreme Value Theory Under Weak Mixing Conditions, eds. *M. Rosenblatt in Studies in Probability Theory*, 46-110.

M.R. Leadbetter (1975) Aspects of Extremes Value Theory for Stationary Processes : a Survey of Stochastic Processes and Related Topics, Puri M.L. (ed.), *Academic Press*.

M.R. Leadbetter (1974) Extreme Values in Stationary Sequences, *Z. Wahrsch. Verw.-Gebiete*, **28**, 289-303.

A.W. Ledford, J. A. Tawn (1997) Modelling Dependence within Joint Tail Regions, *J. Roy. Statist. Soc., B*, **59**, 475-499.

- A.W. Ledford, J. A. Tawn (1998) Concomitants of Extremes, *Adv. Appl. Probab.*, **30**, 197-215.
- M. Loève (1977) Probability Theory 4rd edition *Springer, New York*.
- F.M. Longin (2000) From Value at Risk to Stress Testing : The Extreme Value Approach, *J. Banking & Finance*, **24**, 1097-1130.
- F.M. Longin, B. Solnik (1997) Correlations Structure of International Equity Markets During Extremely Volatile Periods, *Working Paper 97-039, ESSEC*.
- R.M. Loynes (1965) Extreme Values in Uniformly Mixing Stationary Stochastic Processes, *Ann. Math. Statist.*, **36**, 993-999.
- B. B. Mandelbrot (1963) The Variation of Certain Speculatives Prices, *Journal of Business*, **36**, 394 - 419.
- N.R. Mann, (1984) Statistical Estimation of Parameters of the Weibull and Fréchet Distribution, *Statistical Extremes and Applications*, J. Tiago de Oliveira ed. D. Reidel Publishing Company.
- A.W. Marshall, I. Olkin (1983) Domain of Attraction of Multivariate Extreme Value Distributions, *The Annals of Probability*, **11(1)**, 168-177.
- D.M. Mason (1982) Law of Large Numbers for Sums of Extreme Values, *Ann. of Proba.*, **10**, 754 - 764.
- D. Mejsler (1949) On a Theorem of B.V. Gnedenko *Sb .Trudov Inst. Math. Akad. Nauk Ukraine R.S.R.*, **12**, 31-35.
- Th. Mikosch, C. Starica (1998) Limit Theory for Sample Autocorrelations and Extremes of a GARCH(1,1) Process, *University of Groningen and Chalmers University of Gothenburg Preprint*.
- R. Von Mises (1923) Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe, *in Selected Papers, Providence, R.I. : Amer, Math. Soc. Vol. II*, 129-134.
- Y. Mittal (1974) Limiting Behaviour of Maxima in Stationary Gaussian Sequences, *Ann. Probab.*, **2**, 231-242.

- Y. Mittal, D. Ylvisaker (1975) Limit Distributions for the Maxima of Stationary Gaussian Processes, *Stochastic Process. Appl.*, **3**, 1-18.
- U.A. Muller, M. Dacorogna, O.V. Pictet (1996) Heavy Tails in high-frequency financial data, Preprint & Associés. Research Group, Zurich.
- A. McNeil (1999) Extreme Value Theory for Risk Managers, *preprint, Departement Mathematik ETH Zentrum Zürich.*
- A. McNeil, R. Frey (1998) Estimation of Tail-related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series : an Extreme Value Approach, *preprint, Departement Mathematik ETH Zentrum Zürich.*
- M.F. Neuts (1967) Waitingtimes Between Record Observations, *Journal of Appl. Probab.*, **4**, 206-208.
- X.F. Niu (1997) Extreme Value Theory for a Class of Nonstationary Time Series with Applications, *Ann. Appl. Probab.*, **2**, 508 - 522.
- X.F. Niu (1996) Non Linear Additive Models for Environmental Time Series with Applications to Ground-Level Ozone Data Analysis, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **91**, 1310-1321.
- V.V. Petrov (1995) Limit Theorems of Probability Theory. Oxford University Press, Oxford.
- M. Philipp (1971) Mixing Sequences of Random Variables and Probabilistic Number Theory, *Memoirs. Amer. Math. Soc.*, 114.
- J. Pickands (1981) Multivariate Extreme Value Distributions, *Proc. 43rd ISI Meeting*, Buenos aires.
- J. Pickands (1975) Statistical Inference Using Extreme Order Statistics, *Ann. Statist.*, **3**, 119-131.
- P. Prescott, A.T. Walden (1983) Maximum-Likelihood Estimation of the Parameters of the Three-Parameter Generalized Extreme Value Distribution from Censored Samples, *J. Statist. Comput. Simulation*, **16**, 241-250.
- P. Prescott, A.T. Walden (1980) Maximum-Likelihood Estimation of the Parameters of the Three-Parameter Generalized Extreme Value Distribution,

*Biometrika*, **67**, 723-724.

S.T. Rachev (1993) Rate of Convergence for Maxima of Random Arrays with Applications to Stock Returns, *Statistics and Decisions*, **11**, 270-288.

S.T. Rachev (1991) Probability Metrics and The Stability of Stochastic Models, Wiley, Chichester.

S.T. Rachev, S.I. Resnick (1991) Max-Geometric Infinite Divisibility and Stability, *Stochastic Models*, **7**, 191-218.

R.D. Reiss, M. Thomas (1997) Statistical Analysis of Extreme Values, Birkhauser Verlag, Basel.

A. Rényi (1962) Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations, Colloquim on Combinational Methods in Probability Theory, August, *Mathematisk Institute, Aarhus Universitat, Denmark*.

A. Rényi (1953) On the Theory of Order Statistics, *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, **4**, 191 - 131.

A. Rényi (1958) Quelques remarques sur les propriétés d'évènements dépendants, *J. Math. Pures Appl.*, **37**, 393 - 398.

S.I. Resnick (1987), C. Starica Consistency of Hill's Estimator for Dependent Data, *J. Appl. Probab.*, **32**, 139-167.

S.I. Resnick (1987) Extreme Values, Regular Variation and Point Processus, *Springer-Verlag*, New-York.

S.I. Resnick (1975) Weak Convergence to Extremal Processes, *Ann. Probab.*, **3**, 951-960.

S.I. Resnick, M. Rabinovitch (1973) The Structure of Extremal Processes, *Adv. Appl. Probab.*, **5**, 287-307.

S.I. Resnick (1972) Products of Distribution Functions Attracted to Extreme Value Laws, *J. Appl. Probab.*, **8**, 781-793.

S.I. Resnick (1971) Tail Equivalence and its Applications, *J. of Applied Probability*, **8**, 136-156.

- H. Rootzèn (1986) Extremes Value Theory for Moving Average Processes, *Ann. Probab.*, **14**, 612-652.
- H. Rootzèn (1984) Extremes in Continuous Stochastic Processes Statistical Extremes and Applications, J. Tiago de Oliveira ed., D. Reidel Publishing Company.
- H. Rootzèn (1982) The Rate of Convergence of Extremes of Stationary Normal Sequences, (*To Appear in Adv. Appl. Proba.*).
- H. Rootzèn (1978) Extremes of Moving Averages of Stable Processes, *Ann. Probab.*, **6**, 847-869.
- M. Rosenblatt (1956) A Central Limit Theorem and a Strong Mixing Conditions, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, **42**, 43 - 47.
- H.J. Rossberg (1964) Die Asymptotische Unabhagigkeit der kleinsten und grossten Werte einer Stichprobe vom Stichprobenmittel, *Math. Nachr.*, **28**, 305-318.
- H.J. Rossberg (1965) Uber die stochastische unabhagigkeit gewisser funktionen van ranggrossen, *Math. Nachor.*, **28**, 157 - 167.
- G. Samorodniski, M. S. Taqqu (1996),  $\alpha$ -stable processes, Chapman and Hall.
- N. Shephard (1996) Statstical Aspect of ARCH and Stochastic Volatility, in D.R. Cox, D.V. Hinkley and O.E. Barndorff-Nielsen (eds.), *Likelihood, Time Series with Econometric and other Applications*, Chapman and Hall, London.
- M. Sibuya (1960) Bivariate Extremal Distributions **I**, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **11**, 195-210.
- N.V. Smirnov, (1952) Limit Distributions for the Terms of a Variational Series, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. I*, **11**, 82-143.
- R.L. Smith (1987) Estimating Tails of Probability Distributions, *Ann. Statist.*, **15**, 1174-1207.
- R.L. Smith (1985) Maximum Likelihood Estimation in a Class of Non Regular Cases, *Biometrika*, **72(1)**, 67-90.

- R.L. Smith (1984) Threshold Methods for Sample Extremes Statistical Extremes Applications, J. Tiago de Oliveira (ed.) D. Reidel Publish.
- R.L. Smith (1982) Uniform Rates of Convergence in Extreme-Value Theorm, *Adv. Appl. Prob.*, **14**, 600-622.
- D. Slepian (1962) The One-sided Barrier Problem for Gaussian Noise, *Bell System Techn. J.*, **41**, 463-501.
- C. Starica (1999) Estimation of the Extreme Value Distribution for Constant Conditional Correlation Models, *Dpt of Statistics, The Wharton School, University of Pennsylvania USA and Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, Preprint.*
- L. Takàcs (1958) On the general Probability Theorem and its Applications in the Theory of Stochastic Processes, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **54**, 219 - 224.
- L. Takàcs (1975) Combinatorial and Analytic Methods in the Theory of Queues, *Adv. Appl. Prob.*, **7**, 607 - 635.
- J.A. Tawn (1988) Bivariate Extreme Value Theorm Models and Estimation, *Biometrika*, **75(3)**, 397-415.
- S.J. Taylor (1986) Modelling Financial Time Series, *Wiley*, Chichester.
- J. Tiago de Oliveira (1980) Bivariate Extremes : Foundations and Statistics, in *Proc. Fifth Int. Symp. Multivar. Anal.*, P.R. Krishnaia ed., Amsterdam : North Holland, 349-366.
- J. Tiago de Oliveira, (1975a) Bivariate Extremes : Extensions, *Bull. Int. Stat. Inst.*, **46(2)**, 241-252.
- J. Tiago de Oliveira (1975b) Bivariate and Multivariate Extremal Distributions, in *Statistical Distributions in Scientific Work*, G.P. Patil et al., eds., **1**, 355-361. Dordrecht-Holland : Reidel.
- L.H.C. Tippett (1925) On the Extreme Individuals and the Range of Samples Taken From a Normal Population, *Biometrika*, **17**, 364-387.



- K.F. Turkman, A.A Turkman (1997), Extremes of Bilinear Time Series, *Journ. of Time Series Anal.*, **18**, 305 - 319.
- W. Vervaat (1979) On a Stochastic Difference Equation and a Representation of non-negative Infinitely Divisible Random Variables, *Adv. Appl. Probab.*, **11**, 750-783.
- G.S. Watson (1954) Extreme Values in Samples from m-Dependent Stationary Stochastic Processes, *Ann. Math. Statist.*, **25**, p. 798-800.
- J.H.V. Watts (1977) Limit Theorems and Representations for Order Statistics from Dependent Sequences, Ph. D. Thesis, Statistics Dept. Univ. of N.C.
- A.A. Weiss (1984) *ARMA* models with *ARCH* Errors, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **3**, 129 - 143.
- I. Weissman (1975) Extremal Processes Generated by Independent Non-identically Distributed Random Variables, *Ann. Probab.*, **3**, 172-177.
- I. Weissman (1977) On Location and Scale Functions of a Class of Limiting Processes with Applications to Extreme Value Theory, *Ann. Probab.*, **3**, 178-181.
- I. Weissman (1978) Estimation of Parameters and Large Quantiles Based on the k-Largest Observations, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **73**, 812-815.
- I. Weissman (1980) Estimation of Tail Parameters under Type I Censoring, *Statist. Theor. Math.*, **A9(11)**, 1165-1175.
- I. Weissman (1982) Confidence Intervals for the Parameter II : Unknown Shape Parameter, *Comm. Statist. Theor. Method.*, **A11**, 2451-2474.
- R.E. Welsch (1971) A Weak Convergence Theorem for Order Statistics from Strong-Mixing Processes, *Ann. Math. Statist.*, **42**, 1367-1646.
- P. Whittle (1959) Sur la distribution du maximum d'un polynôme trigonométrique à coefficients aléatoires, *Calc. Prob. Appl. Internat. Centre Nat. Sci.*, **87**, 173 - 184.
- P. Whittle (1951) Hypothesis Testing in Time Series Analysis, *Almqvist och Wicksel*, Uppsala.

# Documents de recherche EPEE

## 2002

- 02 - 01      **Inflation, salaires et SMIC: quelles relations?**  
*Yannick L'HORTY & Christophe RAULT*
- 02 - 02      **Le paradoxe de la productivité**  
*Nathalie GREENAN & Yannick L'HORTY*
- 02 - 03      **35 heures et inégalités**  
*Fabrice GILLES & Yannick L'HORTY*
- 02 - 04      **Droits connexes, transferts sociaux locaux et retour à l'emploi**  
*Denis ANNE & Yannick L'HORTY*
- 02 - 05      **Animal Spirits with Arbitrarily Small Market Imperfection**  
*Stefano BOSI, Frédéric DUFOURT & Francesco MAGRIS*
- 02 - 06      **Actualité du protectionnisme :  
l'exemple des importations américaines d'acier**  
*Anne HANAUT*

## 2001

- 01 - 01      **Optimal Privatisation Design and Financial Markets**  
*Stefano BOSI, Guillaume GIRMENS & Michel GUILLARD*
- 01 - 02      **Valeurs extrêmes et series temporelles :  
application à la finance**  
*Sanvi AVOUYI-DOVI & Dominique GUEGAN*
- 01 - 03      **La convergence structurelle européenne :  
rattrapage technologique et commerce intra-branche**  
*Anne HANAUT & El Mouhoub MOUHOUD*
- 01 - 04      **Incitations et transitions sur le marché du travail :  
une analyse des stratégies d'acceptation et des refus d'emploi**  
*Thierry LAURENT, Yannick L'HORTY, Patrick MAILLE & Jean-François OUVRRARD*
- 01 - 05      **La nouvelle économie et le paradoxe de la productivité :  
une comparaison France - Etats-Unis**  
*Fabrice GILLES & Yannick L'HORTY*
- 01 - 06      **Time Consistency and Dynamic Democracy**  
*Toke AIDT & Francesco MAGRIS*
- 01 - 07      **Macroeconomic Dynamics**  
*Stefano BOSI*
- 01 - 08      **Règles de politique monétaire en présence d'incertitude :  
une synthèse**  
*Hervé LE BIHAN & Jean-Guillaume SAHUC*
- 01 - 09      **Indeterminacy and Endogenous Fluctuations  
with Arbitrarily Small Liquidity Constraint**  
*Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 01 - 10      **Financial Effects of Privatizing the Production of Investment Goods**  
*Stefano BOSI & Carine NOURRY*

- 01 - 11      **On the Woodford Reinterpretation of the Reichlin OLG Model :  
a Reconsideration**  
*Guido CAZZAVILLAN & Francesco MAGRIS*
- 01 - 12      **Mathematics for Economics**  
*Stefano BOSI*
- 01 - 13      **Real Business Cycles and the Animal Spirits Hypothesis  
in a Cash-in-Advance Economy**  
*Jean-Paul BARINCI & Arnaud CHERON*
- 01 - 14      **Privatization, International Asset Trade and Financial Markets**  
*Guillaume GIRMENS*
- 01 - 15      **Externalités liées dans leur réduction et recyclage**  
*Carole CHEVALLIER & Jean DE BEIR*
- 01 - 16      **Attitude towards Information and Non-Expected Utility Preferences :  
a Characterization by Choice Functions**  
*Marc-Arthur DIAYE & Jean-Max KOSKIEVIC*
- 01 - 17      **Fiscalité de l'épargne en Europe :  
une comparaison multi-produits**  
*Thierry LAURENT & Yannick L'HORTY*
- 01 - 18      **Why is French Equilibrium Unemployment so High :  
an Estimation of the WS-PS Model**  
*Yannick L'HORTY & Christophe RAULT*
- 01 - 19      **La critique du « système agricole » par Smith**  
*Daniel DIATKINE*
- 01 - 20      **Modèle à Anticipations Rationnelles  
de la CONjoncture Simulée : MARCOS**  
*Pascal JACQUINOT & Ferhat MIHOUBI*
- 01 - 21      **Qu'a-t-on appris sur le lien salaire-emploi ?  
De l'équilibre de sous emploi au chômage d'équilibre :  
la recherche des fondements microéconomiques  
de la rigidité des salaires**  
*Thierry LAURENT & Hélène ZAJDELA*
- 01 - 22      **Formation des salaires, ajustements de l'emploi  
et politique économique**  
*Thierry LAURENT*

## 2000

- 00 - 01      **Wealth Distribution and the Big Push**  
*Zoubir BENHAMOUCHE*
- 00 - 02      **Conspicuous Consumption**  
*Stefano BOSI*
- 00 - 03      **Cible d'inflation ou de niveau de prix :  
quelle option retenir pour la banque centrale  
dans un environnement « nouveau keynésien » ?**  
*Ludovic AUBERT*
- 00 - 04      **Soutien aux bas revenus, réforme du RMI et incitations à l'emploi :  
une mise en perspective**  
*Thierry LAURENT & Yannick L'HORTY*
- 00 - 05      **Growth and Inflation in a Monetary « Selling-Cost » Model**

*Stefano BOSI & Michel GUILLARD*

- 00 - 06     **Monetary Union : a Welfare Based Approach**  
*Martine CARRE & Fabrice COLLARD*
- 00 - 07     **Nouvelle synthèse et politique monétaire**  
*Michel GUILLARD*
- 00 - 08     **Neoclassical Convergence versus Technological Catch-Up :  
a Contribution for Reaching a Consensus**  
*Alain DESDOIGTS*
- 00 - 09     **L'impact des signaux de politique monétaire sur la volatilité  
intra-journalière du taux de change deutschemark - dollar**  
*Aurélie BOUBEL, Sébastien LAURENT & Christelle LECOURT*
- 00 - 10     **A Note on Growth Cycles**  
*Stefano BOSI, Matthieu CAILLAT & Matthieu LEPELLEY*
- 00 - 11     **Growth Cycles**  
*Stefano BOSI*
- 00 - 12     **Règles monétaires et prévisions d'inflation en économie ouverte**  
*Michel BOUTILLIER, Michel GUILLARD & Auguste MPACKO PRISO*
- 00 - 13     **Long-Run Volatility Dependencies in Intraday Data  
and Mixture of Normal Distributions**  
*Aurélie BOUBEL & Sébastien LAURENT*

## 1999

- 99 - 01     **Liquidity Constraint, Increasing Returns and Endogenous Fluctuations**  
*Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 99 - 02     **Le temps partiel dans la perspective des 35 heures**  
*Yannick L'HORTY & Bénédicte GALTIER*
- 99 - 03     **Les causes du chômage en France :  
Une ré-estimation du modèle WS - PS**  
*Yannick L'HORTY & Christophe RAULT*
- 99 - 04     **Transaction Costs and Fluctuations in Endogenous Growth**  
*Stefano BOSI*
- 99 - 05     **La monnaie dans les modèles de choix intertemporels :  
quelques résultats d'équivalences fonctionnelles**  
*Michel GUILLARD*
- 99 - 06     **Cash-in-Advance, Capital, and Indeterminacy**  
*Gaetano BLOISE, Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 99 - 07     **Sunspots, Money and Capital**  
*Gaetano BLOISE, Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 99 - 08     **Inter-Jurisdictional Tax Competition in a Federal System  
of Overlapping Revenue Maximizing Governments**  
*Laurent FLOCHEL & Thierry MADIES*
- 99 - 09     **Economic Integration and Long-Run Persistence  
of the GNP Distribution**  
*Jérôme GLACHANT & Charles VELLUTINI*
- 99 - 10     **Macroéconomie approfondie : croissance endogène**  
*Jérôme GLACHANT*

- 99 - 11 **Growth, Inflation and Indeterminacy in a Monetary « Selling-Cost » Model**  
*Stefano BOSI & Michel GUILLARD*
- 99 - 12 **Règles monétaires, « ciblage » des prévisions et (in)stabilité de l'équilibre macroéconomique**  
*Michel GUILLARD*
- 99 - 13 **Educating Children : a Look at Household Behaviour in Côte d'Ivoire**  
*Philippe DE VREYER, Sylvie LAMBERT & Thierry MAGNAC*
- 99 - 14 **The Permanent Effects of Labour Market Entry in Times of High Aggregate Unemployment**  
*Philippe DE VREYER, Richard LAYTE, Azhar HUSSAIN & Maarten WOLBERS*
- 99 - 15 **Allocating and Funding Universal Service Obligations in a Competitive Network Market**  
*Philippe CHONE, Laurent FLOCHEL & Anne PERROT*
- 99 - 16 **Intégration économique et convergence des revenus dans le modèle néo-classique**  
*Jérôme GLACHANT & Charles VELLUTINI*
- 99 - 17 **Convergence des productivités européennes : réconcilier deux approches de la convergence**  
*Stéphane ADJEMIAN*
- 99 - 18 **Endogenous Business Cycles : Capital-Labor Substitution and Liquidity Constraint**  
*Stefano BOSI & Francesco MAGRIS*
- 99 - 19 **Structure productive et procyclicité de la productivité**  
*Zoubir BENHAMOUCHE*
- 99 - 20 **Intraday Exchange Rate Dynamics and Monetary Policy**  
*Aurélie BOUBEL & Richard TOPOL*

## 1998

- 98 - 01 **Croissance, inflation et bulles**  
*Michel GUILLARD*
- 98 - 02 **Patterns of Economic Development and the Formation of Clubs**  
*Alain DESDOIGTS*
- 98 - 03 **Is There Enough RD Spending ? A Reexamination of Romer's (1990) Model**  
*Jérôme GLACHANT*
- 98 - 04 **Spécialisation internationale et intégration régionale. L'Argentine et le Mercosur**  
*Carlos WINOGRAD*
- 98 - 05 **Emploi, salaire et coordination des activités**  
*Thierry LAURENT & Hélène ZAJDELA*
- 98 - 06 **Interconnexion de réseaux et charge d'accès : une analyse stratégique**  
*Laurent FLOCHEL*
- 98 - 07 **Coût unitaires et estimation d'un système de demande de travail : théorie et application au cas de Taiwan**  
*Philippe DE VREYER*

- 98 - 08      **Private Information :**  
**an Argument for a Fixed Exchange Rate System**  
*Ludovic AUBERT & Daniel LASKAR*
- 98 - 09      **Le chômage d'équilibre. De quoi parlons nous ?**  
*Yannick L'HORTY & Florence THIBAUT*
- 98 - 10      **Deux études sur le RMI**  
*Yannick L'HORTY & Antoine PARENT*
- 98 - 11      **Substituabilité des hommes aux heures et ralentissement de la productivité ?**  
*Yannick L'HORTY & Christophe RAULT*
- 98 - 12      **De l'équilibre de sous emploi au chômage d'équilibre :**  
**la recherche des fondements microéconomiques de la rigidité des salaires**  
*Thierry LAURENT & Hélène ZAJDELA*